

ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
HERAUSGEGEBEN VON

FRITZ REGLER UND HANS THIRRING
WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG
PAUL URBAN
GRAZ

11. BAND 3. HEFT
MIT 4 ABBILDUNGEN
AUSGEGEBEN IM DEZEMBER 1957)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1957

Die **Acta Physica** erscheinen zwanglos nach Maßgabe der einlaufenden Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt werden. Arbeiten können in den Sprachen der internationalen Kongresse erscheinen.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca“, Prof. Dr. PAUL URBAN, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, zu richten; **alle geschäftlichen Mitteilungen** an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 76 71 Serie Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 100 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 100 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Allgemeine Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen: Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht mit demselben Problem vertraut sind. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift soll ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle sein. Die Herausgeber erachten es als ihre Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen.“

Zusammenfassungen: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Übersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerlässlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. ... kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

11. Band/3. Heft	Inhaltsverzeichnis	Seite
Cap, F. ARTHUR MARCH †		289
Gustafson, W. A. and M. Z. v. Krzywoblocki. On Multiplicity Theorems and an Exact Solution in Diabatic Flow. Part II		294
Donnert, H. Zur Theorie relativistisch invarianter Spinwellengleichungen I.		321
Donnert, H. Zur Theorie relativistisch invarianter Spinwellengleichungen II		355
Bergmann, O. Einige Bemerkungen zum Uhrenparadox		377
Buchbesprechungen		390

Arthur March †

Von

Ferdinand Cap, Innsbruck*

Die diesjährige Hauptversammlung der österreichischen physikalischen Gesellschaft ist durch ein sehr trauriges Ereignis überschattet, den Tod von Prof. Dr. ARTHUR MARCH, Ordinarius für theoretische Physik an der Universität Innsbruck.

Obwohl seit Herbst 1954 ein schweres Leiden, das ihn gegen Ende des Jahres 1955 zu einer Operation zwang, an seiner Gesundheit zehrte, kam sein plötzlicher Tod am 17. April 1957 allen überraschend. MARCH's Lebenswille und seine große Schaffenskraft noch im letzten Monat seines Lebens täuschten Freunde und Bekannte über seinen wahren körperlichen Zustand hinweg.

ARTHUR MARCH wurde am 23. Februar 1891 in Brixen in Südtirol geboren. Er verbrachte dort auch seine Jugend und besuchte das von Augustinern geleitete staatliche Gymnasium.

Im Jahre 1909 begann er das Studium der Physik und Mathematik an der Universität Innsbruck, an der damals Prof. TUMLIRZ den Lehrstuhl für theoretische Physik innehatte. Prof. TUMLIRZ, ein Gegner der Quantentheorie, konnte einem MARCH nicht viel bieten, und so ging MARCH einige Semester zu PRINGSHEIM und SOMMERFELD nach München und zu HASENÖHRL nach Wien, wo er in SCHRÖDINGER und THIRRING kongeniale Studienkollegen und Freunde fand.

Nach Innsbruck zurückgekehrt, verfaßte MARCH seine Dissertation „Die Änderung des Widerstandes eines Elektrolyten im magnetischen Feld“ und promovierte am 19. Juli 1913 zum Dr. phil.

MARCH wandte sich dann der Mittelschullaufbahn zu und war in den Jahren 1914–1924 Professor am Mädchenrealgymnasium in Innsbruck.

Im Jahre 1917 habilitierte sich MARCH bei TUMLIRZ für theoretische Physik und wurde einige Jahre später zum Titularprofessor ernannt. Im Oktober 1926 erfolgte dann seine Ernennung zum außerordentlichen Professor und zum Vorstand der mathematisch-physikalischen Lehrmittelsammlung, wie das Institut für Theoretische Physik damals hieß.

* Gedenkrede, gehalten anlässlich der Jahreshauptversammlung der österreichischen physikalischen Gesellschaft in Graz am 15. Oktober 1957.

Die wissenschaftlich bedeutsamen Arbeiten MARCHS, die ich später noch würdigen werde, erschienen alle erst nach 1928. Im Jahre 1930 erschien MARCHS erstes Lehrbuch über Quantenmechanik. Die klare Interpretation des damals noch kaum gedeuteten und richtig verstandenen Formalismus der Quantentheorie und seiner erkenntnistheoretischen Bedeutung erregte in der Fachwelt Aufsehen und trug Prof. MARCH eine Einladung nach Oxford ein, wo er von 1934—1936 als Gastprofessor lehrte. In Oxford und teilweise auch in Cambridge konnte MARCH mit den bedeutendsten Physikern dieser Zeit zusammenarbeiten — BORN, DIRAC, KAPITZA, SCHRÖDINGER und andere waren seine Kollegen.

Nach Innsbruck zurückgekehrt, wurde MARCH im Herbst des Jahres 1936 zum Ordinarius für theoretische Physik ernannt.

Die folgenden Jahre waren emsiger wissenschaftlicher Arbeit und der Vorlesungstätigkeit an der Universität Innsbruck gewidmet. Seine Erholung fand MARCH in seinen geliebten Bergen und beim Skisport.

Als 1939 düstere Wolken über Europa heraufzogen, war Prof. MARCHS Familie in Irland auf Besuch, er selbst hier. Durch den Kriegsausbruch wurde die Familie getrennt. Gegen Ende des Krieges verlor MARCH durch einen Bombentreffer auch noch seine Wohnung. In dieser traurigen Zeit schloß sich Prof. MARCH enger an seine Freunde an und trat der österreichischen Widerstandsbewegung bei. 1945 gehörte Prof. MARCH der von Minister a. D. GRUBER geleiteten provisorischen Landesregierung von Tirol an; er erhielt später mehrere Ehrendiplome für seine politische Tätigkeit.

Da ihn jedoch seine Tätigkeit als Dekan und akademischer Lehrer ganz in Anspruch nahm, schied er bald von der politischen Bühne. Trotz dieser mehrfachen Belastung fand MARCH in diesen Jahren 1946—1947 Zeit für drei Lehrbücher, weitere Lehrbücher und Arbeiten folgten 1948—1957.

1946 wurde Prof. MARCH zum Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien gewählt.

Es ist nicht möglich, MARCHS wissenschaftlichem Lebenswerk in einer kurzen Gedenkrede die entsprechende Würdigung teilwerden zu lassen. Ich muß mich damit begnügen, die wichtigsten Werke von Prof. MARCH aufzuzählen und zu versuchen, seine sich im wesentlichen auf drei Gebiete erstreckenden wissenschaftlichen Leistungen kurz zu skizzieren. Das erste Buch aus MARCHS Feder erschien 1919 unter dem Titel „Theorie der Strahlung und der Quanten“. Dieses Werk beschäftigte sich mit dem PLANCKSchen Quantengesetz und mit der BOHRschen Quantentheorie. Die zweite Auflage dieses Werkes war eigentlich ein völlig neues Werk, da ja die Quantentheorie seit 1925 einen ungeahnten, völlig neue Aspekte eröffnenden Fortschritt genommen hatte. Dieses Lehrbuch erschien 1931 unter dem Titel „Die Grundlagen der Quantenmechanik“. Schon zu dieser Zeit wurde MARCHS Vorliebe für allgemein verständliche Darstellung offenbar.

1933 erschien seine „Moderne Atomphysik“, eine sich an den gebildeten Laien richtende Einführung in die Quantentheorie. MARCH hat als einer der ersten die tiefe erkenntnistheoretische, philosophische und weltanschauliche Bedeutung der Quantentheorie erkannt; in seinen allgemein verständlichen Darstellungen verfolgte MARCH einen doppelten Zweck — einmal wollte er sich selbst klar werden über die naturphilosophische Bedeutung der neuen Theorien und die Fachkollegen zu einer Diskussion auffordern, andererseits hielt er die naturphilosophischen und weltanschaulichen Folgerungen der Quantentheorie für so wichtig, daß er die Verpflichtung empfand, sie einem weiteren Kreise ohne mathematische Belastung mitzuteilen.

In einem vierten Buch, „Natur und Erkenntnis“, 1948 erschienen, sagt dies MARCH im Vorwort ganz deutlich. MARCH hat sich auch nicht gescheut, aus der Erkenntnis der modernen Physik konsequent philosophische, ja auch politische Schlüsse zu ziehen. Er ging auch auf die Atombombe und ihre Gefahren ein und beschäftigte sich schon 1946 mit den uns gerade in diesen Tagen bewegenden Problemen der Kontrolle der Atomwaffen. (Natur und Erkenntnis, S. 236.)

In seinem, für den an den Ergebnissen der modernen Naturwissenschaft interessierten Laien bestimmten Büchlein „Der Weg des Universums“ (1948, Bern) erreicht MARCH einen Höhepunkt klarer, allgemein verständlicher Darstellung, in blendendem, zuweilen direkt dichterischem Stil.

Hören wir ihn selbst: „Die Welt begann mit einem absoluten Nichts. Ihre gesamte Materie stand Kern an Kern zusammengepreßt hinter den Kulissen des Raumes, der den Schauplatz des künftigen Geschehens bilden sollte, und wartete auf das Stichwort, das sie auf die Bühne rief. Auf dieses Wort hin ergoß sich ein Flammenstrom in den bisher leeren Raum, und damit setzte, nicht friedvoll, sondern unter einem ungeheuerlichen Aufruhr der Elemente, das gewaltige Schauspiel ein, in welchem es einer Gottheit gefiel, das Schicksal dieser Welt sich vollziehen zu lassen.“

Im Jahre 1951 erschien MARCHS Hauptwerk, das in englischer Sprache abgefaßt ist: „Quantum Theory of Particles and Wave Fields“. Dieses Lehrbuch erfreut sich in den USA unter den Studierenden größter Beliebtheit. In diesem Werk findet sich auch die erste und leider einzige lehrbuchmäßige Darstellung der Theorie der kleinsten Länge.

Nicht nur in seinem zweiten Lehrbuch der Quantentheorie, sondern auch in seinen Aufsätzen in wissenschaftlichen Zeitschriften kommt MARCHS Ringen um ein Verstehen des quantentheoretischen Formalismus, sein Wunsch, hinter die mathematischen Symbole zu sehen, zum Ausdruck. In einer 1931 in der Zeitschrift für Physik publizierten Untersuchung beschäftigt sich MARCH mit dem Zustandsbegriff in der Quantentheorie, und im gleichen Jahr erschienen auch seine Arbeiten zur alten Frage, ob das Licht eine Wellenbewegung sei oder aus Korpuskeln bestehe. Die von der Quantentheorie gegebene Antwort, daß das Licht sich in gewissen Experimenten wie eine elektromagnetische Welle, in

gewissen Experimenten sich aber wie ein Teilchen benimmt, ohne das eine oder andere ganz zu sein, erläutert MARCH am Elementarprozeß der Photographie.

Bevor sich MARCH so eingehend mit der Quantentheorie befaßte, beschäftigte er sich auch viel mit thermodynamischen Problemen. Von MARCH stammt z. B. eine Ableitung des WIEDEMANN-FRANZschen Gesetzes aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Auch eine Theorie der Thermodynamik der Kolloide stammt von MARCH, — diesem Problemkreis entnahm MARCH auch öfters Themen für Dissertationen. Schließlich verdanken auch die Kristallographie und die Theorie der Röntgenspektren MARCH wertvolle Beiträge. (Vgl. das Verzeichnis der wichtigsten wissenschaftlichen Zeitschriftenaufsätze.)

MARCH bedeutendste Leistung war jedoch die Einführung einer die Meßmöglichkeit in kleinsten Räumen beschränkenden elementaren Länge, einer neuen fundamentalen Naturkonstanten. Durch die Annahme einer solchen Begrenzung der Meßmöglichkeit gelang es MARCH, manche Schwierigkeiten der modernen Quantentheorie zu klären. Wenn auch über die Art der mathematischen Durchführung der neuen Hypothese heute noch verschiedene Anschauungen bestehen, so ist die Idee als solche bereits allgemein anerkannt.

1955 erschien das naturphilosophisch-erkenntnistheoretische Werk: „Die physikalische Erkenntnis und ihre Grenzen“, und noch im Februar 1957, knapp vor seinem Tod, erschien MARCHS Beitrag zu Rowohlt's Deutscher Enzyklopädie: „Das neue Denken der modernen Physik“.

Neben diesen 8 Büchern veröffentlichte MARCH in den Jahren 1915—1950 über 60 wissenschaftliche Einzelarbeiten; die Angabe einer genauen Zahl ist leider nicht möglich, da MARCH in seiner Bescheidenheit nie ein Arbeitenverzeichnis anlegte und manche seiner älteren Arbeiten oder Arbeiten, die er für unwichtig hielt, selbst gar nicht mehr kannte — es genügte ihm, ein Problem erkannt und gelöst zu haben; die Publikation interessierte ihn dann meist nicht mehr sonderlich. Diese Bescheidenheit ist auch der Grund dafür, daß die Theorie der kleinsten Länge noch bis vor wenigen Jahren ausschließlich W. HEISENBERG, der sich auch mit diesen Problemen befaßte, zugeschrieben wurde. MARCH konnte es jedoch noch erleben, daß nun in der internationalen wissenschaftlichen Literatur auch seine Arbeiten immer mehr bekannt und anerkannt wurden. Wie immer die Theorie der kleinsten Länge in einer zukünftigen Theorie auch formuliert sein wird — MARCHS Name wird zu allen Zeiten mit dieser neuen fundamentalen Naturkonstanten verbunden bleiben.

Einige der wichtigsten Zeitschriftenveröffentlichungen von Prof. Dr. A. MARCH.

Annalen der Physik:

71 (1923) Kontinuierliche Röntgenspektren.

75 (1924) Kontinuierliche Röntgenspektren und PLANCKsches Strahlungsgesetz.

- 83 (1927) Ableitung des Gesetzes von WIEDEMANN-FRANZ aus dem II. Hauptsatz.
84 (1927) Thermodynamik disperser Systeme.

Kolloid-Zeitschrift:

- 45 (1928) Thermodynam. Theor. d. kolloiden Zustandes.

Wiener Klinische Wochenschrift:

- 37 (1924) Kontinuierliche Röntgenspektren und Wärmestrahlung.

Z. f. Kristallographie:

- 81 (1932) Mathematische Theorie der Regelung nach der Korngestalt bei affiner Deformation.

Z. f. Physik:

- 73 (1931) Wirkung kleinster Strahlungsenergien auf Silberbromid: Wellen- oder Korpuskulartheorie des Lichtes?
73 (1931) Zustandsbegriff in der Quantenmechanik.
104 (1937) Die Geometrie kleinster Räume I.
104 (1937) Die Geometrie kleinster Räume II.
105 (1937) Zur Grundlegung und Anwendung einer statistischen Metrik.
106 (1937) Statistische Metrik und Quantenelektrodynamik.
108 (1938) Die Frage nach der kleinsten Wellenlänge.
114 (1939) MARCH, A. und E. FORADORI: Ganzzahligkeit in Raum und Zeit I. Ganzzahligkeit in Raum und Zeit II.

Acta Physica Austriaca:

- 1 (1948) Quantentheorie der Wellenfelder und kleinste Länge (zwei Arbeiten).

On Multiplicity Theorems and an Exact Solution in Diabatic Flow

Part II

By

W. A. Gustafson and M. Z. v. Krzywoblocki

University of Illinois, U.S.A.

With 4 Figures

(Received May 18, 1956)

5.0 A Family of Exact Solutions of the Diabatic Flow Equations

5.1 Analysis and Development of a One-Parameter Family of Solutions

The equations describing diabatic flow are considered in their usual form as given by the system (1.4.1) to (1.4.4), and an analysis is presented resulting in a one parameter family of exact solutions. At one point in the analysis, the constant in the energy equation $d^2(\psi)$ is taken to be a universal constant, thus simplifying the procedure somewhat. This convenience does not restrict the generality of the analysis in any way, since Theorem I provides a method of generating a flow having $d^2 = d^2(\psi)$ from a flow in which d^2 is a universal constant.

Equations (1.4.1) and (1.4.2) expanded in CARTESIAN coordinates in two dimensions are the following:

$$u u_{,x} + v u_{,y} = -\varrho^{-1} \dot{p}_{,x}, \quad u v_{,x} + v v_{,y} = -\varrho^{-1} \dot{p}_{,y}, \quad (5.1.1)$$

$$(\varrho u)_{,x} + (\varrho v)_{,y} = 0, \quad (5.1.2)$$

where u and v are the x and y components of velocity, respectively, and the comma denotes partial differentiation. The pressure-density-entropy relation (1.4.4) is rearranged and used in the following form:

$$p^{1/\nu} = \theta(\psi) \varrho \exp(S c_p^{-1}), \quad \theta(\psi) = p_0^{1/\nu} \varrho_0^{-1} \exp(-S_0 c_p^{-1}), \\ \nu = c_p c_v^{-1}. \quad (5.1.3)$$

The energy equation derived in section 1.2 with the use of the concept of momentum can be transformed, using (5.1.3), into the following form:

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \nu(\nu - 1)^{-1} \theta p^{(\nu-1)/\nu} \exp(S c_p^{-1}) - Q = i_0(\psi), \quad (5.1.4)$$

where $i_0(\psi)$ has replaced $1/2 d^2(\psi)$ to simplify the notation used in this chapter.

The stream function ψ is now introduced to satisfy the continuity equation (5.1.2) as follows:

$$\varrho u = \psi_{,y}, \quad \varrho v = -\psi_{,x}. \quad (5.1.5)$$

Since diabatic flow is, in general, rotational, a vorticity equation is necessary for a complete description of the problem. The vorticity equation is derived below by a procedure quite similar to that given in [9] for isentropic flow. It is convenient to consider the (s, n) coordinate system, where s is the running coordinate along a streamline, and n is normal to a streamline. The energy equation (1.2.8) with $1/2 d^2(\psi)$ replaced by $i_0(\psi)$ is differentiated partially with respect to ψ , using the fact that $\partial/\partial\psi = \varrho^{-1} q^{-1} \partial/\partial n$, thus yielding

$$di_0/d\psi = \varrho^{-1} q_{,n} + \nu(\nu-1)^{-1} \varrho^{-2} q^{-1} p [p^{-1} p_{,n} - \varrho^{-1} \varrho_{,n}] - Q_{,v}. \quad (5.1.6)$$

The entropy S is obtained from (5.1.3) in the form:

$$S = \nu R(\nu-1)^{-1} \ln(p^{1/\nu} \varrho^{-1} \theta^{-1}). \quad (5.1.7)$$

Defining $\bar{S} = S \nu^{-1} R^{-1}$ and differentiating \bar{S} partially with respect to ψ furnishes:

$$\bar{S}_{,\psi} = (\nu-1)^{-1} \varrho^{-1} q^{-1} [\nu^{-1} p^{-1} p_{,n} - \theta^{-1} \theta_{,n} - \varrho^{-1} \varrho_{,n}]. \quad (5.1.8)$$

Multiplying (5.1.8) by $\nu p \varrho^{-1}$ and subtracting from (5.1.6) gives

$$di_0/d\psi - \nu p \varrho^{-1} \bar{S}_{,\psi} = \varrho^{-1} q_{,n} + \varrho^{-2} q^{-1} p_{,n} - Q_{,v} + \nu(\nu-1)^{-1} \varrho^{-1} \theta^{-1} p d\theta/d\psi. \quad (5.1.9)$$

The equations of momentum in (s, n) coordinates, according to [9], are the following:

$$q \phi_{,s} + \varrho^{-1} q^{-1} p_{,n} = 0, \quad q q_{,s} + \varrho^{-1} p_{,s} = 0, \quad (5.1.10)$$

where ϕ is the angle between the velocity q and some fixed reference system. Using the first of (5.1.10) and the equation of state for a perfect gas, equation (5.1.9) becomes:

$$di_0/d\psi - T S_{,\psi} = \varrho^{-1} [q_{,n} - q \phi_{,s}] - Q_{,v} + \nu(\nu-1)^{-1} \varrho^{-1} \theta^{-1} p d\theta/d\psi. \quad (5.1.11)$$

The definition of entropy $dS = T^{-1} dQ$, can be expanded to give:

$$(Q_{,x} - T S_{,x}) dx + (Q_{,\psi} - T S_{,\psi}) d\psi = 0,$$

but since x and ψ are independent, this implies that

$$Q_{,x} = T S_{,x}, \quad Q_{,\psi} = T S_{,\psi},$$

and hence, in (5.1.11), $T S_{,\psi}$ cancels $Q_{,\psi}$. The definition of vorticity in (s, n) coordinates is:

$$-2\omega = q_{,n} - q \phi_{,s} = q_{,n} - q_{n,s},$$

and in (x, y) coordinates it is

$$-2\omega = u_{,y} - v_{,x},$$

and thus using the definition of vorticity in (5.1.11), the final form of the vorticity equation is obtained as:

$$v_{,x} - u_{,y} = -\varrho [di_0/d\psi - \nu(\nu-1)^{-1} p^{(\nu-1)/\nu} d\theta/d\psi \exp(S c_p^{-1})]. \quad (5.1.12)$$

All of the necessary basic equations for diabatic flow are now available. It is convenient to proceed with the analysis by transforming the equations from the independent variables (x, y) to new independent variables (\bar{x}, ψ) with $x = \bar{x}$. Using the notation $h(x, y) = \bar{h}(\bar{x}, \psi)$ the following relations are obtained:

$$\bar{h}_{,\bar{x}} = h_{,x} \bar{x}_{,x} + h_{,y} \bar{x}_{,\psi}, \quad \bar{h}_{,\psi} = h_{,x} x_{,\psi} + h_{,y} y_{,\psi},$$

from which the well known transformation relations are obtained in the following form:

$$h_{,x} = 1/J_1 (\bar{h}_{,\bar{x}} y_{,\psi} - \bar{h}_{,\psi} y_{,\bar{x}}), \quad \bar{h}_{,y} = -1/J_1 (\bar{h}_{,\bar{x}} x_{,\psi} - \bar{h}_{,\psi} x_{,\bar{x}}), \quad (5.1.13)$$

where the JACOBIAN J_1 is

$$J_1 \begin{pmatrix} x, y \\ \bar{x}, \psi \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{,\bar{x}} & y_{,\bar{x}} \\ x_{,\psi} & y_{,\psi} \end{vmatrix} = x_{,\bar{x}} y_{,\psi} - x_{,\psi} y_{,\bar{x}}.$$

The inverse of J_1 , denoted by J_2 , is easily evaluated as follows using (5.1.5):

$$J_2 \begin{pmatrix} \bar{x}, \psi \\ x, y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{x}_{,x} & \psi_{,x} \\ \bar{x}_{,y} & \psi_{,y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\varrho v \\ 0 & \varrho u \end{vmatrix} = \varrho u,$$

and since $J_1 J_2 = I$, where I is the identity matrix, it is easily verified that

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & v u^{-1} \\ 0 & \varrho^{-1} u^{-1} \end{vmatrix} = \varrho^{-1} u^{-1}.$$

Hence, using the appropriate elements of J_1 , the relations (5.1.13) can be rewritten as follows:

$$h_{,x} = \bar{h}_{,\bar{x}} - \varrho v \bar{h}_{,\psi}, \quad h_{,y} = \varrho u \bar{h}_{,\psi}. \quad (5.1.14)$$

It is apparent that this transformation is valid whenever $\varrho u \neq 0$, which indicates that a point where $u = 0$ or a point at rest ($u = v = 0$) is a singular point.

Applying the relations (5.1.14) to $u(x, y)$ and $v(x, y)$, it is tacitly assumed that no singularities occur, and hence, the vorticity equation (5.1.12) is transformed to the following:

$$v_{,x} - \varrho v v_{,\psi} - \varrho u u_{,\psi} = -\varrho [di_0/d\psi - r(v-1)^{-1} p^{(v-1)/r} d\theta/d\psi \exp(S c p^{-1})], \quad (5.1.15)$$

where the bar has been omitted since $x = \bar{x}$. Differentiating (5.1.4) with respect to ψ and substituting the result for $di_0/d\psi$ into (5.1.15), and simplifying by using (5.1.3) and the definition of entropy, the following equation results:

$$-v_{,x} = \dot{p}_{,\psi}. \quad (5.1.16)$$

Since the JACOBIAN of the transformation in general does not vanish, it is thus possible to solve for \bar{x} and ψ in the form $\bar{x} = \bar{x}(x, y) = x$ and $\psi = \psi(x, y)$. From (5.1.5), it is possible to integrate and solve for:

$$\psi = -\varrho v x + \varrho u y, \quad \text{or} \quad y = \varrho^{-1} u^{-1} \psi + u^{-1} v x, \quad (5.1.17)$$

since the constant of integration can be taken as zero without loss of generality, from which it follows by differentiating partially, first with respect to ψ and then with respect to x , that the forms associated with (5.1.5) are

$$y, \psi = \varrho^{-1} u^{-1}, \quad y, x = v u^{-1}. \quad (5.1.18)$$

The problem now is to solve equations (5.1.3), (5.1.4), (5.1.16), and (5.1.18) for the quantities u , v , p , ϱ , and y , in terms of x and ψ , assuming that the entropy S is specified, which in turn determines Q . To begin the procedure of solution, a new function $\chi(x, \psi)$ is introduced to satisfy (5.1.16) as follows:

$$p = \chi, x, \quad v = -\chi, \psi. \quad (5.1.19)$$

Using (5.1.19), equation (5.1.4) takes the form:

$$u^2 = 2(i_0 + Q) - 2v(v-1)^{-1} \theta \chi, x^{(v-1)/v} \exp(S c_p^{-1}) - \chi, \psi^2. \quad (5.1.20)$$

Using the last part of (5.1.19) and (5.1.20), the two equations (5.1.18) become

$$y, x = -\chi, \psi \{A\}^{-1/2}, \quad (5.1.21)$$

$$y, \psi = \theta \chi, x^{-1/v} \exp(S c_p^{-1}) \{A\}^{-1/2}, \quad (5.1.22)$$

where

$$A = 2(i_0 + Q) - 2v(v-1)^{-1} \theta \chi, x^{(v-1)/v} \exp(S c_p^{-1}) - \chi, \psi^2. \quad (5.1.22a)$$

Differentiating (5.1.21) with respect to ψ and (5.1.22) with respect to x produces the same quantity on the left side of each equation, assuming the necessary continuity to exist, thus enabling the elimination of y by equating the two equations. The differentiation is carried out below, assuming for convenience that i_0 is a universal constant, thus simplifying the problem somewhat, but without loss of generality as mentioned at the beginning of this section.

$$\begin{aligned} y, \psi x = & -\chi, \psi \psi \{A\} \{A\}^{-3/2} + \chi, \psi \{Q, \psi - v(v-1)^{-1} \cdot \\ & \cdot [\theta' \chi, x^{(v-1)/v} \exp(S c_p^{-1}) + v^{-1}(v-1) \theta \chi, x^{-1/v} \chi, \psi x \exp(S c_p^{-1}) + \\ & + c_p^{-1} \theta \chi, x^{(v-1)/v} \exp(S c_p^{-1}) S, \psi] - \chi, \psi \chi, \psi \psi \{A\}^{-3/2}; \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

$$\begin{aligned} y, x \psi = & \theta \chi, x^{-1/v} \exp(S c_p^{-1}) [c_p^{-1} S, x - v^{-1} \chi, x^{-1} \chi, x x] \{A\} \{A\}^{-3/2} - \\ & - \theta \chi, x^{-1/v} \exp(S c_p^{-1}) \{Q, x - v(v-1)^{-1} \cdot \\ & \cdot [v^{-1}(v-1) \theta \chi, x^{-1/v} \chi, x x \exp(S c_p^{-1}) + \\ & + c_p^{-1} \theta \chi, x^{(v-1)/v} S, x \exp(S c_p^{-1})] - \chi, \psi \chi, x \psi \{A\}^{-3/2}. \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

The two above equations can be simplified by using the definition of entropy, which relates the externally added energy Q , the temperature T , and the entropy. For this purpose, the equation of state for a perfect gas is solved for the temperature and using (5.1.3) and (5.1.19) this becomes

$$\begin{aligned} T = p \varrho^{-1} R^{-1} &= p^{(v-1)/v} \theta R^{-1} \exp(S c_p^{-1}) = \\ &= v(v-1)^{-1} \theta c_p^{-1} \chi, x^{(v-1)/v} \exp(S c_p^{-1}). \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

From the definition of entropy, $dS = T^{-1} dQ$, it was shown previously in this section that the following relations are valid:

$$Q, x = T S, x, \quad Q, \psi = T S, \psi. \quad (5.1.26)$$

Considering (5.1.25) and (5.1.26), it is evident that $Q_{,\psi}$ in (5.1.23) is cancelled by the term containing $S_{,\psi}$ and similarly $Q_{,x}$ in (5.1.24) is cancelled by the term containing $S_{,x}$. Up to this point, the appearance of Q and S in the system of equations under consideration has caused no particular difficulties, and the procedure has been quite analogous to that used by KIEBEL [5] for rotational isentropic flow.

A generalized separation of variables procedure is now applied by assuming that $\chi(x, \psi)$ is of the following form:

$$\chi(x, \psi) = f(x) H(\psi). \quad (5.1.27)$$

Substitution of (5.1.27) into the simplified form of (5.1.23) and (5.1.24) yields the following equations respectively:

$$\begin{aligned} \gamma_{,\psi x} = & -f H'' \{A\} \{A\}^{-3/2} - \\ & -f H' \{v^{(v-1)/v} - 1\}^{-1} \theta' H^{(v-1)/v} f'^{(v-1)/v} \exp(S c_p^{-1}) + \\ & \theta H^{-1/v} H' f'^{(v-1)/v} \exp(S c_p^{-1}) + f^2 H' H'' \{A\}^{-3/2}; \end{aligned} \quad (5.1.28)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{,x\psi} = & \theta H^{-1/v} f'^{-1/v} \exp(S c_p^{-1}) [c_p^{-1} S_{,x} - v^{-1} f'^{-1} f''] \{A\} \{A\}^{-3/2} + \\ & + \theta H^{-1/v} f'^{-1/v} \exp(S c_p^{-1}) \{\theta H^{(v-1)/v} f'^{-1/v} f'' \exp(S c_p^{-1}) + \\ & + f f' H'^2\} \{A\}^{-3/2}. \end{aligned} \quad (5.1.29)$$

The separation of variables procedure to be used is discussed in general terms below and the details are carried out later. The right sides of (5.1.28) and (5.1.29) contain certain functions of x and ψ and their derivatives, which permit these equations to be written symbolically as follows, assuming that $S(x, \psi)$ is a sum of a function of x and a function of ψ and that g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) contains contributions from both $f(x)$ and $S(x, \psi)$, and $H(\psi)$ and $\theta(\psi)$ contain contributions from the corresponding part of $S(x, \psi)$:

$$\gamma_{,\psi x} = B [g_1(x), H(\psi), \theta(\psi)] + C [g_2(x), H(\psi), \theta(\psi)], \quad (5.1.30)$$

$$\gamma_{,x\psi} = D [g_3(x), H(\psi), \theta(\psi)] + E [g_4(x), H(\psi), \theta(\psi)]. \quad (5.1.31)$$

In equating these two equations, there are two possible ways which might be considered, (1) $B = D$ and $C = E$, or (2) $B = E$ and $C = D$. However, since terms B and D both contain $\{A\}$, it seems simpler to consider the first possibility, leaving the second open for any future investigations which might be of interest. The procedure now is to determine $f(x)$, so that in (5.1.30) and (5.1.31), the functions $g_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) can be factored from each term as follows:

$$\gamma_{,\psi x} = g_1(x) \bar{B} [H(\psi), \theta(\psi)] + g_2(x) \bar{C} [H(\psi), \theta(\psi)], \quad (5.1.32)$$

$$\gamma_{,x\psi} = g_3(x) \bar{D} [H(\psi), \theta(\psi)] + g_4(x) \bar{E} [H(\psi), \theta(\psi)], \quad (5.1.33)$$

and also requiring that $g_1(x) = g_3(x)$ and $g_2(x) = g_4(x)$. Hence, equating $\bar{B} = \bar{D}$ and $\bar{C} = \bar{E}$, all quantities involving the independent variable x cancel, leaving two ordinary differential equations for $H(\psi)$ and $\theta(\psi)$. With these two functions known, the complete solution to the problems can be obtained.

It is now necessary to find means of determining $f(x)$ so that the above formal operations can be carried out. First, consider the relation $B = D$ obtained from (5.1.28) and (5.1.29) in the form:

$$-f H'' = \theta H^{-1/\nu} f'^{-1/\nu} \exp(S c_p^{-1}) \cdot [c_1 c_1^{-1} c_p^{-1} S_{,x} - c_2 c_2^{-1} \nu^{-1} f'^{-1} f''], \quad (5.1.34)$$

where the constants c_1 and c_2 have been introduced to aid in developing a general approach for the determination of $f(x)$, their necessity becoming evident later. Since in general $S = S(x, \psi)$, it is evident that, if the separation of variables described above is to be accomplished, the functional form of $S(x, \psi)$ must also be determined from this analysis. Comparing the left side of (5.1.34) with the first term on the right, it is apparent that for factorization resulting in the same function of x on both sides of the equation, the function $f(x)$ must satisfy the following condition:

$$f = c_1 f'^{-1/\nu} c_p^{-1} S_{,x} \exp(S c_p^{-1}). \quad (5.1.35)$$

Comparing the left side of (5.1.34) with the second term on the right side shows that $f(x)$ must also satisfy

$$f = c_2 f'^{-1-1/\nu} f'' \exp(S c_p^{-1}). \quad (5.1.36)$$

Equating $C = E$ yields the following expression:

$$\begin{aligned} & -f H' \{ \nu(\nu-1)^{-1} \theta' H^{(\nu-1)/\nu} c_3 c_3^{-1} f'^{(\nu-1)/\nu} \exp(S c_p^{-1}) + \\ & + \theta H^{-1/\nu} H' c_3 c_3^{-1} f'^{(\nu-1)/\nu} \exp(S c_p^{-1}) + f^2 H' H'' \} = \\ & = \theta H^{-1/\nu} \{ \theta H^{(\nu-1)/\nu} c_3 c_3^{-1} f'^{(\nu-1)/\nu} \exp(S c_p^{-1}) \cdot \\ & \cdot c_2 c_2^{-1} f'^{-1-1/\nu} f'' \exp(S c_p^{-1}) + c_3 c_3^{-1} f f'^{(\nu-1)/\nu} \exp(S c_p^{-1}) H'^2 \}, \end{aligned} \quad (5.1.37)$$

where another constant c_3 has been introduced and the first term on the right side has been multiplied by $f' f'^{-1}$. Consideration of the left side of (5.1.37) shows that, since the last term contains f^2 , the factorization must result in f^3 in front of the brackets. This implies that both the first and second terms inside the brackets must satisfy

$$f^2 = c_3 f'^{(\nu-1)/\nu} \exp(S c_p^{-1}). \quad (5.1.38)$$

According to the separation process proposed previously, it is evident that f^3 must factor outside the brackets on the right side of (5.1.37) as well. Using (5.1.36) and (5.1.38) appropriately, it is easily verified that f^3 does indeed meet this requirement.

Equations (5.1.35) and (5.1.38) immediately imply the following equation:

$$c_p^{-1} S_{,x} = c_3 c_1^{-1} f' f^{-1},$$

and integration provides

$$c_p^{-1} S = \ln f^{c_3/c_1} + S_2(\psi) = S_1(x) + S_2(\psi), \quad (5.1.39)$$

where $S_2(\psi)$ is an arbitrary function of ψ . Since, $\exp(S c_p^{-1}) = \exp(S_1) \exp(S_2)$, hence, for the previous separation of variables procedure, only $\exp(S_1)$ need be considered, since $\exp(S_2)$ is a function of ψ and remains in the two resulting differential equations for

$H(\psi)$ and $\theta(\psi)$. Thus, in (5.1.34) and (5.1.37), $\exp(S c_p^{-1}) = \exp(S_1) \cdot \exp(S_2)$ must be inserted, and hence, equations (5.1.35), (5.1.36), and (5.1.38) should be rewritten as follows:

$$f = c_1 f'^{-1/\nu} (dS_1/dx) \exp(S_1), \quad (5.1.40)$$

$$f = c_2 f'^{-1-1/\nu} f'' \exp(S_1), \quad (5.1.41)$$

$$f^2 = c_3 f'^{(\nu-1)/\nu} \exp(S_1). \quad (5.1.42)$$

Therefore, if $f(x)$ and $S_1(x)$ satisfy the above three equations, then the desired separation of variables in (5.1.28) and (5.1.29) results, and when equated as specified, the following two ordinary differential equations for $H(\psi)$ and $\theta(\psi)$ result:

$$-H'' = \theta H^{-1/\nu} \exp(S_2) [c_1^{-1} - \nu^{-1} c_2^{-1}], \quad (5.1.43)$$

$$\begin{aligned} -H' \{c_3^{-1} \nu(\nu-1)^{-1} \theta' H^{(\nu-1)/\nu} \exp(S_2) + c_3^{-1} \theta H^{-1/\nu} H' \exp(S_2) + \\ + H' H''\} = \theta H^{-1/\nu} \exp(S_2) \{c_3^{-1} c_2^{-1} \theta H^{(\nu-1)/\nu} \exp(S_2) + c_3^{-1} H'^2\}. \end{aligned} \quad (5.1.44)$$

The appearance of $S_2(\psi)$ in (5.1.43) and (5.1.44) is no cause for concern, since it is determined in terms of $H(\psi)$ and $\theta(\psi)$ from thermodynamic conditions later.

The system (5.1.40), (5.1.41), and (5.1.42) must now be solved to obtain the functions $f(x)$ and $S_1(x)$, and the constants c_1 , c_2 , and c_3 must also be determined. Since there seems to be no consistent nomenclature in the literature, this system is referred to as over-specified, i.e. more equations than unknowns. Such systems of algebraic equations are called redundant. Below, a particular method is used to solve the system, followed by a brief discussion of other possible solutions.

Solving (5.1.41) and (5.1.42) for $\exp(S_1)$ and then equating and simplifying, the following ordinary differential equation is obtained:

$$f'^{-2} f'' = c_3 c_2^{-1} f^{-1}, \quad (5.1.45)$$

and letting $r = f'$, $r' = f'' = r dr/df$, (5.1.45) becomes $r^{-1} dr = c_3 c_2^{-1} f^{-1} df$, which has the solution

$$r = df/dx = (c_0 f)^{c_3/c_2}, \quad (5.1.46)$$

where c_0 is an arbitrary constant of integration. Equation (5.1.46) can be integrated to give:

$$f(x) = K_1 x^a, \quad (5.1.47)$$

where

$$K_1 = (\alpha^{-1})^a c_0^{a c_3/c_2}, \quad (5.1.48)$$

$$\alpha = (c_2 c_3^{-1}) (c_2 c_3^{-1} - 1)^{-1}. \quad (5.1.49)$$

Substituting (5.1.47) into (5.1.42), $S_1(x)$ is obtained in the following form:

$$S_1(x) = \ln(K_2 x^\beta), \quad (5.1.50)$$

where

$$K_2 = (\alpha^{-1})^\beta c_0^{(\nu+1)/[\nu(c_2 c_3^{-1}-1)]} c_3^{-1}, \quad (5.1.51)$$

$$\beta = [\nu(2 c_2 c_3^{-1} - 1) + 1] [\nu(c_2 c_3^{-1} - 1)]^{-1}. \quad (5.1.52)$$

Verification that (5.1.47) and (5.1.50) represent a solution of the system under consideration, and the computation of the constants c_1 , c_2 , and c_3 , is reserved until after the following discussion of two alternate methods of solution.

Since the system being investigated is over specified, there may be some question as to whether the form of the solution, represented by (5.1.47) and (5.1.50), might be different if the system was solved by a different procedure. Hence, starting with (5.1.40) and (5.1.41) and solving for $S_1(x)$ in terms of $f(x)$, and then substituting this result into (5.1.42), yields results analogous to (5.1.47) and (5.1.50) but with

$$K_1 = (\alpha^{-1})^\alpha c_3^{-1/2\beta/(c_2 c_1^{-1})} c_0^{-1/2\beta}, \quad (5.1.53)$$

$$K_2 = (\alpha^{-1})^\beta c_3^{-1/2\beta} c_0^{-1/2\beta(\nu+1)/\nu}, \quad (5.1.54)$$

where

$$\alpha = [\nu(c_2 c_1^{-1} + 1) - 1] [\nu(c_2 c_1^{-1} - 1) - 1]^{-1},$$

$$\beta = 2\nu c_2 c_1^{-1} [\nu(c_2 c_1^{-1} - 1) - 1]^{-1}. \quad (5.1.55)$$

Similarly, starting with (5.1.40) and (5.1.42) and solving for $S_1(x)$ in terms of $f(x)$, and then substituting into (5.1.40), yields results analogous to (5.1.47) and (5.1.50) but with

$$K_1 = (\alpha^{-1})^\alpha c_3^{-\nu\alpha/(\nu-1)} c_0^{-\nu\beta/(\nu-1)}, \quad (5.1.56)$$

$$K_2 = (\alpha^{-1})^\beta c_3^{-\nu\beta/(\nu-1)} c_0^{-\beta(\nu+1)/(\nu-1)}, \quad (5.1.57)$$

where

$$\alpha = (\nu - 1) [\nu(c_3 c_1^{-1} - 1) - 1]^{-1},$$

$$\beta = c_3 c_1^{-1}(\nu - 1) [\nu(c_3 c_1^{-1} - 1) - 1]^{-1}. \quad (5.1.58)$$

Since the functional form of the solutions is the same for all three methods of solution, it is evident that all three are fundamentally equivalent, and hence, only the results for K_1 and K_2 given by (5.1.48) and (5.1.51) are considered further.

The first solution for $f(x)$ and $S_1(x)$, as given by (5.1.47) and (5.1.50) respectively, along with (5.1.48), (5.1.49), (5.1.51), and (5.1.52), contain the constants c_1 , c_2 , and c_3 which are not arbitrary, and the arbitrary constant c_0 . In order to verify the solution and to obtain conditions on the constants, the functions $f(x)$ and $S_1(x)$ are substituted into the system (5.1.40), (5.1.41), and (5.1.42). The constants must be such that each equation is an identity. Substituting the solution and appropriate derivatives into (5.1.40) yields

$$1 = c_1 c_2^{-1} \nu^{-1} [\nu(2c_2 c_3^{-1} - 1) + 1], \quad (5.1.59)$$

while substitution into (5.1.41) and (5.1.42) reduces both to the identity $1 = 1$. It is observed that the ratio $c_2 c_3^{-1}$ can be considered as an arbitrary parameter, and then (5.1.59) determines the ratio $c_2 c_1^{-1}$. The ratio $c_2 c_3^{-1}$ also appears in the exponent β , given by (5.1.52), which can itself be considered as a parameter. Hence, the exponent α which appears in (5.1.47), given by (5.1.49), can be expressed in terms of the parameter β by solving (5.1.52) for $c_2 c_3^{-1}$ and substituting the result into (5.1.49). Thus, the exponent α has the following form:

$$\alpha = [\nu(\beta - 1) + 1] [\nu + 1]^{-1}. \quad (5.1.60)$$

If the second and third methods of solution were analyzed in a similar way, it would be found that (5.1.60) would result for both methods, thus further substantiating the fact that all of the three previously obtained solutions are equivalent.

The constants c_1 , c_2 , and c_3 can now be determined by the following procedure. Since c_0 in (5.1.48) is an arbitrary constant resulting from integration, it is selected for convenience so that K_1 is unity. Expressing K_1 in terms of β , which is given by (5.1.52), the condition that K_1 be unity requires c_0 to be the following:

$$c_0 = \{[\nu(\beta - 1) + 1] [\nu + 1]^{-1}\}^{\{\nu(\beta - 1) + 1\}/[\nu(\beta - 2)]}. \quad (5.1.61)$$

Expressing K_2 in terms of β and using (5.1.61) the following is obtained:

$$K_2 = \{[\nu(\beta - 1) + 1] [\nu + 1]^{-1}\}^{-1 + 1/\nu} c_3^{-1}. \quad (5.1.62)$$

It would also be convenient to have K_2 , as well as K_1 , be unity. This is easily obtained if

$$c_3 = \{[\nu(\beta - 1) + 1] [\nu + 1]^{-1}\}^{1/\nu - 1}. \quad (5.1.63)$$

However, if one of the three constants c_1 , c_2 , c_3 , is assigned a value, then the others must be such that (5.1.59) is satisfied. If the right side of (5.1.59) is multiplied by $c_2 c_3^{-1}$, then c_1 is easily obtained as:

$$c_1 = 1/\beta \{[\nu(\beta - 1) + 1] [\nu + 1]^{-1}\}^{1/\nu}, \quad (5.1.64)$$

and then substitution of (5.1.63) and (5.1.64) into (5.1.59) yields:

$$c_2 = \{[\nu(\beta - 1) + 1] [\nu + 1]^{-1}\}^{1/\nu} (\nu + 1) [\nu(\beta - 2)]^{-1}. \quad (5.1.65)$$

Hence, the separation of variables proposed in this section is assured if $f(x)$ and $S_1(x)$ are of the following form as determined by (5.1.47) and (5.1.50), with $K_1 = K_2 = 1$, respectively:

$$f(x) = x^\alpha, \quad S_1(x) = \ln x^\beta, \quad (5.1.66)$$

where α is defined by (5.1.60), and β is assumed to be an arbitrary real parameter. Hence, the function defined by (5.1.27) is

$$\chi(x, \psi) = f(x) H(\psi) = x^\alpha H(\psi), \quad (5.1.67)$$

and the entropy defined by (5.1.39) is

$$c_p^{-1} S = S_1(x) + S_2(\psi) = \ln x^\beta + \ln g(\psi) = \ln (x^\beta g), \quad (5.1.68)$$

with the assumption that $S_2(\psi) = \ln g(\psi)$, which is determined later from thermodynamic conditions.

The problem now is to solve (5.1.43) and (5.1.44) for $H(\psi)$ and $\theta(\psi)$ using the values of the constants given by (5.1.63), (5.1.64), and (5.1.65). These equations have the following form:

$$-H'' = \theta g H^{-1/\nu} \alpha^{-1/\nu} [\beta \nu + 2] [\nu + 1]^{-1}, \quad (5.1.69)$$

$$\begin{aligned} & -\nu(\nu - 1)^{-1} \alpha^{(\nu - 1)/\nu} \theta' H^{(\nu - 1)/\nu} H' g - \\ & - 2 \alpha^{(\nu - 1)/\nu} \theta g H^{-1/\nu} H'^2 - H'^2 H'' = \\ & = -\alpha^{1 - 2/\nu} \theta^2 g^2 H^{1 - 2/\nu} \nu (2 - \beta) (\nu + 1)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.1.70)$$

The separation of variables process described above resulting in (5.1.69) and (5.1.70) can be checked by substituting (5.1.66) directly

into (5.1.28) and (5.1.29) and equating $B = D$ and $C = E$, thus obtaining (5.1.69) and (5.1.70).

Equations (5.1.69) and (5.1.70) contain the arbitrary parameter β , which supposedly can take on any real finite value. However, certain difficulties can be foreseen in connection with the quantity α , defined by (5.1.60). Since α is raised to a fractional exponent in general, and for certain values of β , α is negative, it is apparent that imaginary numbers may result in some cases. The appearance of α in these two equations results from the definition of $\chi(x, \psi)$, given by (5.1.67), as can be verified by substituting $f(x)$ and its derivatives into (5.1.28) and (5.1.29) as mentioned in the paragraph above. Equation (5.1.60) is plotted in Figure 1 and it is observed that when $\beta < \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha < 0$, and when $\beta > \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha > 0$. Hence, the appearance of imaginary numbers is easily avoided by defining $\chi(x, \psi)$ as follows:

$$\chi(x, \psi) = x^\alpha H(\psi), \quad \text{for } \beta > \nu^{-1}(\nu - 1), \quad \alpha > 0, \quad (5.1.71)$$

$$\chi(x, \psi) = -x^\alpha H(\psi), \quad \text{for } \beta < \nu^{-1}(\nu - 1), \quad \alpha < 0. \quad (5.1.72)$$

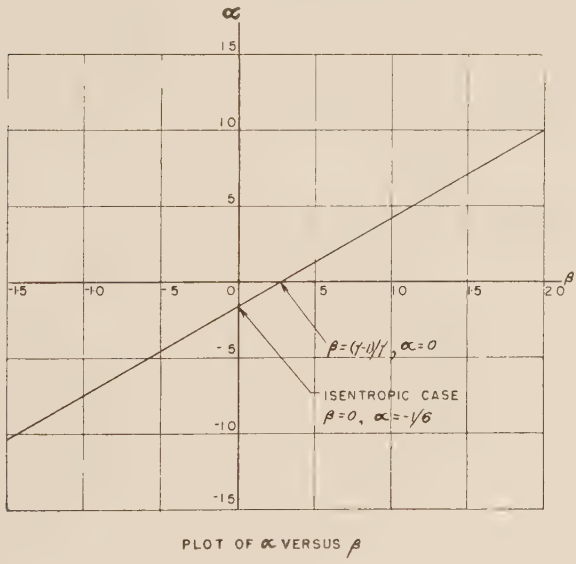


Fig. 1

The particular case $\beta = \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha = 0$, is not covered by the general analysis presented in this section, but is discussed in section 5.2. The analysis up to this point has been based on the definition of $\chi(x, \psi)$ as given by (5.1.71), which results in the system (5.1.69) and (5.1.70) valid only for $\beta > \nu^{-1}(\nu - 1)$. The use of (5.1.72) introduces no major changes into the analysis, but insures that no imaginary numbers appear and

causes some sign changes, thus resulting in the two following equations instead of (5.1.69) and (5.1.70):

$$H'' = \theta g H^{-1/\nu} (-\alpha)^{-1/\nu} (\beta \nu + 2) (\nu + 1)^{-1}, \quad (5.1.73)$$

$$\begin{aligned} \nu(\nu - 1)^{-1} (-\alpha)^{(\nu-1)/\nu} \theta' g H^{(\nu-1)/\nu} H' + 2 (-\alpha)^{(\nu-1)/\nu} \theta g H^{(\nu-1)/\nu} H'^2 + \\ + H'^2 H'' = - (-\alpha)^{1-2/\nu} \theta^2 g^2 H^{1-2/\nu} \nu (2 - \beta) (\nu + 1)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.1.74)$$

These equations may be used only for $\beta < \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha < 0$.

In order to be consistent, only (5.1.69) and (5.1.70) are considered in the following procedure used to obtain the solution for $\beta > \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha > 0$, however, the same procedure in general applies to (5.1.73) and (5.1.74).

The first step in carrying out the remainder of the procedure of solution is to determine $g(\psi)$ in terms of $H(\psi)$ and $\theta(\psi)$ by means of the thermodynamic relations (5.1.26). For this purpose, the temperature given by (5.1.25) is rewritten in the following form using (5.1.68) and (5.1.71):

$$T = \nu(\nu - 1)^{-1} \alpha^{(\nu-1)/\nu} \theta c_p^{-1} g H^{(\nu-1)/\nu} x^{2\alpha}. \quad (5.1.75)$$

Using (5.1.68) and (5.1.75), the first equation of (5.1.26) becomes

$$Q_{,x} = \beta \nu(\nu - 1)^{-1} \alpha^{(\nu-1)/\nu} \theta g H^{(\nu-1)/\nu} x^{2\alpha-1},$$

and integrating partially with respect to x yields

$$Q = \beta \nu(\nu - 1)^{-1} \alpha^{(\nu-1)/\nu} (2\alpha)^{-1} \theta g H^{(\nu-1)/\nu} x^{2\alpha} + F(\psi), \quad (5.1.76)$$

where $F(\psi)$ is an arbitrary function of integration, which is shown later to be zero. Differentiating (5.1.76) partially with respect to ψ gives

$$Q_{,\psi} = \beta \nu(\nu - 1)^{-1} \alpha^{(\nu-1)/\nu} (2\alpha)^{-1} x^{2\alpha} d/d\psi [\theta g H^{(\nu-1)/\nu}] + F'(\psi). \quad (5.1.77)$$

However, expressing $Q_{,\psi}$ from (5.1.26) by using (5.1.68) and (5.1.75), the following result is obtained:

$$Q_{,\psi} = \nu(\nu - 1)^{-1} \alpha^{(\nu-1)/\nu} \theta g H^{(\nu-1)/\nu} x^{2\alpha} g^{-1} g'. \quad (5.1.78)$$

Equating (5.1.77) and (5.1.78), and noting that θ , g , and H are functions only of ψ , it is evident that $F'(\psi) = 0$, or F is a constant, and the following expression is obtained:

$$\beta (2\alpha)^{-1} d/d\psi [\theta g H^{(\nu-1)/\nu}] = \theta g H^{(\nu-1)/\nu} g^{-1} g',$$

which can be rewritten as

$$\beta (2\alpha)^{-1} d/d\psi \{\ln [\theta g H^{(\nu-1)/\nu}]\} = d/d\psi \{\ln g\}. \quad (5.1.79)$$

Integrating (5.1.79) and then solving for g gives the following result:

$$g(\psi) = \bar{c} [\theta H^{(\nu-1)/\nu}]^{-\beta(\nu+1)/[(2-\beta)(\nu-1)]} \quad (5.1.80)$$

where \bar{c} is an arbitrary constant of integration which is defined later.

The procedure for solving (5.1.69) and (5.1.70) is to solve (5.1.69) for θg and substitute this result into the second and last terms of (5.1.70), and substitute (5.1.80) into the first term of (5.1.70), thus obtaining the following equation:

$$\begin{aligned} -\nu(\nu - 1)^{-1} \alpha^{(\nu-1)/\nu} \bar{c} \theta' \theta^{-\beta(\nu+1)/[(2-\beta)(\nu-1)]} H^{-2\alpha/[(\nu-2-\beta)]} H' + \\ + 2 [\nu(\beta - 1) + 1] [\beta \nu + 2]^{-1} H'^2 H'' - H'^2 H'' = - [\nu(\beta - 1) + 1] \cdot \\ \cdot [\nu(2 - \beta)] [\beta \nu + 2]^{-2} H H''^2. \end{aligned} \quad (5.1.81)$$

The first term of (5.1.81) still contains θ and θ' but this can be eliminated by substituting (5.1.80) into (5.1.69) and differentiating with respect to ψ , thus obtaining the following result:

$$\begin{aligned} \theta^{-\beta(\nu+1)/[(2-\beta)(\nu-1)]} \theta' &= (2\bar{c})^{-1} (2-\beta)(\nu-1)(\beta\nu+2)^{-1} \alpha^{-1+1/\nu} \cdot \\ &\cdot [H^{(\beta\nu+2)/[\nu(2-\beta)]} H''' + (\beta\nu+2)[\nu(2-\beta)]^{-1} \cdot \\ &\cdot H^{[2\nu(\beta-1)+2]/[\nu(2-\beta)]} H' H'']. \end{aligned} \quad (5.1.82)$$

Substituting (5.1.82) into (5.1.81) and simplifying furnishes the following differential equation in terms of $H(\psi)$:

$$\begin{aligned} -[\nu(4-\beta)+2]H'^2H'' - \nu(2-\beta)HH'H''' + \\ + 2\nu(2-\beta)[\nu(\beta-1)+1][\beta\nu+2]^{-1}HH''^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.1.83)$$

Dividing (5.1.83) by $HH'H''$ gives the following:

$$\begin{aligned} -[\nu(4-\beta)+2]H^{-1}H' - \nu(2-\beta)H'^{-1}H''' + \\ + 2\nu(2-\beta)[\nu(\beta-1)+1][\beta\nu+2]^{-1}H'^{-1}H'' = 0, \end{aligned} \quad (5.1.84)$$

which can be integrated to obtain the following result:

$$H^{-[\nu(4-\beta)+2]}H'' - \nu(2-\beta)H'^{2\nu(2-\beta)+1}[\nu(\beta-1)+1]/[\beta\nu+2] = k_1, \quad (5.1.85)$$

where k_1 is an arbitrary constant of integration. Equation (5.1.85) can be integrated by letting $r = H'$, $r' = H'' = r dr/dH$, and then separating the variables giving the following equation:

$$r^{\nu(2-\beta)/(\beta\nu+2)} dr = k_1^{-1/[\nu(2-\beta)]} H^{-[\nu(4-\beta)+2]/[\nu(2-\beta)]} dH, \quad (5.1.86)$$

and integration yields

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\beta\nu+2)(\nu+1)^{-1}r^{2(\nu+1)/(\beta\nu+2)} = -k_1^{-1/[\nu(2-\beta)]} \cdot \\ \cdot \frac{1}{2}\nu(2-\beta)(\nu+1)^{-1}H^{-2(\nu+1)/[\nu(2-\beta)]} + \bar{k}_2, \end{aligned} \quad (5.1.87)$$

where \bar{k}_2 is an arbitrary constant of integration. Equation (5.1.87) is rearranged as follows:

$$\begin{aligned} H^{-2(\nu+1)/[\nu(2-\beta)]} = k_1^{1/[\nu(2-\beta)]}(\beta\nu+2) \cdot \\ \cdot [\nu(2-\beta)]^{-1}[\bar{k}_2 - H'^{2(\nu+1)/(\beta\nu+2)}], \end{aligned} \quad (5.1.88)$$

where $k_2 = 2(\nu+1)(\beta\nu+2)^{-1}\bar{k}_2$. Equation (5.1.88) is not integrated, but is used in the above form which specifies $H(\psi)$ in terms of $H'(\psi)$ and in the final form of the solution, $H'(\psi)$ serves as a parameter defining a particular streamline.

A streamline is defined by $\psi = \text{constant}$, and thus (5.1.18) is reduced to the well known equation of a streamline, i.e. $y_{,x} = v u^{-1}$, which is reformulated in (5.1.21). Substituting (5.1.68), (5.1.71), and (5.1.76) into (5.1.21) furnishes the following equation:

$$\begin{aligned} y_{,x} = -H'x^\alpha \{2i_0 + F + x^{2\alpha}[\nu(2-\beta)[\nu(\beta-1)+1]^{-1} \cdot \\ \cdot \alpha^{(\nu-1)/\nu} \theta g H^{(\nu-1)/\nu} - H'^2]\}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.1.89)$$

where F is an arbitrary constant defined previously and is shown below to be zero. The quantity θg in (5.1.89) can be replaced by using (5.1.69), thus giving

$$y_{,x} = -H'x^\alpha \{2i_0 + F - x^{2\alpha}[\nu(2-\beta)(\beta\nu+2)^{-1}HH'' - H'^2]\}^{-1/2}. \quad (5.1.90)$$

The quantity $H H''$ can be formed from (5.1.85) as the following:

$$H H'' = k_1^{-1/[2-\beta]} H^{-2(\nu+1)/[\nu(2-\beta)]} H'^{[2\nu(\beta-1)+2]/[\beta\nu+2]}, \quad (5.1.91)$$

and substituting (5.1.88) appropriately in (5.1.91) yields the following result in terms of $H'(\psi)$:

$$H H'' = H'^{[2\nu(\beta-1)+2]/[\beta\nu+2]} (\beta\nu+2) [\nu(2-\beta)]^{-1} [k_2 - H'^{2(\nu+1)/(\beta+2)}]. \quad (5.1.92)$$

Substituting (5.1.92) into (5.1.90) furnishes

$$y, x = -H' x^\alpha \{2i_0 + F - k_2 H'^{[2\nu(\beta-1)+2]/[\beta\nu+2]} x^{2\alpha}\}^{-1/2}, \quad (5.1.93)$$

which is the equation determining a streamline expressed in terms of x and $H'(\psi)$. If in (5.1.93), the parameter $\beta = 0$, then the equation reduces to the form obtained by KIEBEL [5] for isentropic flow, except for the constant F . Hence, when $\beta = 0$ it is required that $Q = 0$, and inspection of (5.1.76) shows that this does result if the constant F is taken as zero.

Equation (5.1.93) is valid only for $\beta > \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha > 0$, since the analysis was concerned with (5.1.69) and (5.1.70), which are associated with the definition (5.1.71). For cases where $\beta < \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha < 0$, then (5.1.73) and (5.1.74) must be solved, and it can be verified that the result is identical to (5.1.93) except that a positive sign appears in front of the bracket. Hence, (5.1.93) can be solved for y and expressed as follows:

$$y = (\mp) \int H' x^\alpha \{2i_0 - k_2 H'^{[2\nu(\beta-1)+2]/[\beta\nu+2]} x^{2\alpha}\}^{-1/2} dx + G(H'), \quad (5.1.94)$$

using $(-)$ for $\beta > \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha > 0$, and $(+)$ $\beta < \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha < 0$, where $G(H')$ is an arbitrary function of integration. Equation (5.1.94) represents the equation of a streamline given by y as a function of x with $H'(\psi)$ serving as a parameter denoting a particular streamline. Since $H' = H'(\psi)$, and ψ is constant along a streamline, it is evident that $G(H')$ is constant along a streamline and can be taken, without loss of generality, to be zero.

Up to this point, no restriction on β has been specified, but consideration of the exponents in (5.1.88), and other equations as well, indicates that when $\beta = 2$, two of the exponents become infinite. It can be verified that (5.1.88) holds for $\beta < \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha < 0$, and then the last term has an infinite exponent for $\beta = -2/\nu$. The points $\beta = 2, -2/\nu$, correspond to $\alpha = 1, -1$, respectively, and in the open interval bounded by these values, no difficulties arise except for the case $\beta = \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha = 0$, mentioned previously in this section. The examples of exact solutions presented in section 5.3 cover only the interval $-1/2 \leq \alpha \leq 1/2$; hence, it is assumed at this point that β is restricted to the interval $-2/\nu < \beta < 2$, which thus restricts α to the interval $-1 < \alpha < 1$.

For convenience in computing and plotting the streamlines, the following transformation is introduced:

$$\begin{aligned}x &= L \tilde{x}, & y &= L \tilde{y}, & \tilde{x} &= \eta m(\tilde{y}), \\L &= (2 i_0)^{1/2\alpha} k_2^{-(\beta\nu+2)/[2\nu(\beta-1)+2]}, \\H' &= k_2^{(\beta\nu+2)/[2(\nu+1)]} \eta^{-(\beta\nu+2)/(\nu+1)}.\end{aligned}\quad (5.1.95)$$

Applying the transformation (5.1.95) to (5.1.94) furnishes the following equation:

$$\tilde{y} = \mp \int m^\alpha [1 - m^{2\alpha}]^{-1/2} dm, \quad (5.1.96)$$

where $\alpha = [\nu(\beta - 1) + 1] [\nu + 1]^{-1}$. This transformation from the (x, y) plane with $H'(\psi)$ as a parameter, to the (m, \tilde{y}) plane is obviously not one-to-one since there is only one streamline in the (m, \tilde{y}) plane. However, since $m = \tilde{x} \eta^{-1}$, and η is related to $H'(\psi)$, it is apparent that the streamline pattern can be plotted in the (\tilde{x}, \tilde{y}) plane with η serving as a parameter to denote a particular streamline. Hence, the relation between the $(x, y; H')$ space and the $(\tilde{x}, \tilde{y}; \eta)$ space is one-to-one, but the scale is different.

Referring to (5.1.68) and (5.1.76), it is seen that for each different value of β , both S and Q are different functions, which implies that a different diabatic flow problem is associated with each value of β . Equation (5.1.96) provides the streamline pattern which represents the solution to the problem, and it is evident that for each value of β , the streamline pattern is different. Hence, the analysis presented in this section results in the solution to a family of diabatic flows, the members of the family being denoted by the parameter β .

In order to completely solve the problem, the flow variables $u, v, \phi, \varrho, T, Q$, and S must be expressed in terms of x and $H'(\psi)$ and m and η . These results are presented below with the understanding that whenever the sign \mp appears, the negative sign is to be used for $\beta > \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha > 0$, and the positive sign for $\beta < \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha < 0$. When this sign is not used, it means that the equation is valid as it stands for $-2/\nu < \beta < 2$.

The last equation of (5.1.19) defines v , and using (5.1.71) and (5.1.72), it can be expressed in terms of x and H' , and then applying (5.1.95), in terms of m and η as follows:

$$v = \mp x^\alpha H' = \mp \sqrt{2 i_0} \eta^{-1} m^\alpha. \quad (5.1.97)$$

Equation (5.1.20) gives $u^2 = A$, with A given by (5.1.22 a), and A is the quantity in the bracket in (5.1.94), hence, u^2 has the following form:

$$u^2 = 2 i_0 - k_2 H'^{2\alpha(\nu+1)/(\beta\nu+2)} x^{2\alpha} = 2 i_0 [1 - m^{2\alpha}], \quad (5.1.98)$$

and the total velocity magnitude is given by

$$q^2 = u^2 + v^2 = 2 i_0 [1 - m^{2\alpha} (1 - \eta^{-2})]. \quad (5.1.99)$$

The first part of (5.1.19) defines the pressure, and using (5.1.71) and (5.1.72), it becomes

$$\phi = |\alpha| x^{\alpha-1} H, \quad (5.1.100)$$

where $|\alpha|$ is the absolute value of α , thus indicating that the pressure is positive for all values of β . Solving (5.1.88) for H and substituting into the above equation for pressure gives

$$p = |\alpha| K_3 x^{\alpha-1} [k_2 - H'^2(v+1)/(\beta v+2)]^{(\alpha-1)/2}, \quad (5.1.101)$$

where $K_3 = [(\beta v+2) v^{-1} (2-\beta)^{-1}]^{(\alpha-1)/2} k_1^{-1/(v+1)}$. Applying the transformation (5.1.95) to (5.1.101) yields the following:

$$p = |\alpha| K_3 (2 i_0 k_2)^{(\alpha-1)/2} m^{\alpha-1} \eta^{\alpha-1} (1-\eta^{-2})^{(\alpha-1)/2}. \quad (5.1.102)$$

The density is computed from (5.1.3) using (5.1.68), (5.1.69), and (5.1.73) as follows:

$$\begin{aligned} \varrho &= p^{1/v} \theta^{-1} \exp(-S c p^{-1}) = p^{1/v} \theta^{-1} g^{-1} x^{-\beta} = \\ &= \mp p^{1/v} (x^{-\beta}) |\alpha|^{-1/v} (\beta v+2) (v+1)^{-1} H^{-1/v} H''^{-1}, \end{aligned}$$

and using (5.1.100) to obtain $p^{1/v}$, which is always positive, the relation for ϱ becomes

$$\varrho = \mp x^{-(\beta v+2)/(v+1)} (\beta v+2) (v+1)^{-1} H''^{-1}. \quad (5.1.103)$$

The quantity H'' can be expressed in terms of H' by solving (5.1.88) for H and substituting this into (5.1.92); hence, (5.1.103) becomes

$$\varrho = \mp K_4 H'^{-2\alpha(v+1)/(\beta v+2)} x^{-(\beta v+2)/(v+1)} [k_2 - H'^2(v+1)/(\beta v+2)]^\delta, \quad (5.1.104)$$

where $\delta = -[\nu(4-\beta)+2][2(\nu+1)]^{-1}$, and $K_4 = [(\beta v+2) v^{-1} \cdot (2-\beta)^{-1}]^{(\alpha-1)/2} k_1^{-1/(v+1)} v(2-\beta)(v+1)^{-1}$. Using the transformation (5.1.95), equation (5.1.104) becomes

$$\varrho = \mp K_4 K_5 m^{-(\beta v+2)/(v+1)} \eta^{\alpha-1} (1-\eta^{-2})^\delta, \quad (5.1.105)$$

where $K_5 = k_2^{-(\alpha-1)/2} (2 i_0)^{-(\beta v+2)/[2\alpha(v+1)]}$. The energy distribution function Q is given by (5.1.76), and using (5.1.69) and (5.1.92), it has the following form:

$$Q = -\frac{1}{2} \beta(v+1) (v-1)^{-1} (2-\beta)^{-1} x^{2\alpha} [k_2 H'^{2\nu(\beta-1)+2}/(\beta v+2) - H'^2], \quad (5.1.106)$$

and applying (5.1.95) gives

$$Q = -\beta(v+1) i_0 (v-1)^{-1} (2-\beta)^{-1} m^{2\alpha} (1-\eta^{-2}). \quad (5.1.107)$$

It can be verified that (5.1.106) and (5.1.107) are also valid for $\beta < v^{-1}(v-1)$. Comparison of (5.1.99) and (5.1.107) shows that Q can be expressed as a function of q^2 only as follows:

$$Q/i_0 = -\beta(v+1) (v-1)^{-1} (2-\beta)^{-1} (1-q^2/2 i_0). \quad (5.1.107 a)$$

It is observed by considering the canonical equations in Chapter 3, that (5.1.107 a) is the canonical formulation of Q in terms of the "reduced velocity", since $a^2 = 2 i_0$.

Equation (5.1.80) can be rewritten as:

$$g(\psi) = \bar{c} [\theta^{-2\alpha(v+1)/[(2-\beta)(v-1)]} H^{-2\alpha(v+1)/[v(2-\beta)]}]^{\beta/2\alpha}, \quad (5.1.108)$$

and using (5.1.69), (5.1.73), with $g(\psi)$ replaced by (5.1.80), and (5.1.92), equation (5.1.108) becomes

$$\begin{aligned} g(\psi) &= \bar{c} \{ \mp \bar{c}^{-1} |\alpha|^{1/v} (v+1) [\nu(2-\beta)]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot [k_2 H'^{2\alpha(v+1)/(\beta v+2)} - H'^2] \}^{\beta/2\alpha}. \end{aligned} \quad (5.1.109)$$

Substituting (5.1.109) into (5.1.68) gives the entropy in terms of x and $H'(\psi)$, and using (5.1.95), the entropy is expressed in terms of m and η as follows:

$$(S - S_0) c_p^{-1} = \beta (2\alpha)^{-1} \ln \left\{ \mp |\alpha|^{1/\nu} (\nu + 1) [\nu (2 - \beta)]^{-1} \cdot \right. \\ \left. \cdot 2 i_0 m^{2\alpha} (1 - \eta^{-2}) \right\}, \quad (5.1.110)$$

where the arbitrary constant \bar{c} has been chosen to represent the reference level of entropy S_0 , which corresponds to the entropy for isentropic flow as seen by setting $\beta = 0$ in (5.1.110).

The temperature is computed from (5.1.75) using (5.1.69), (5.1.73), (5.1.92), and (5.1.95), and has the following form:

$$T = -\nu(\nu - 1)^{-1} c_p^{-1} \alpha m^{2\alpha} (1 - \eta^{-2}). \quad (5.1.111)$$

The flow patterns contained in the family of flows under discussion contain both subsonic and supersonic domains. Below, an equation is derived which determines the sonic point on each streamline, and the locus of these points determines the sonic line. When the velocity is sonic, $c^2 = u^2 + v^2$, and the energy equation (1.2.8) can be written as

$$c^2 + 2 c^2 (\nu - 1)^{-1} = 2 (i_0 + Q),$$

$$\text{or} \quad c^2 (\nu + 1) (\nu - 1)^{-1} = 2 (i_0 + Q).$$

Solving for c^2 and then replacing c^2 by $q_c^2 = u_c^2 + v_c^2$, the following is obtained:

$$q_c^2 = u_c^2 + v_c^2 = 2 (\nu - 1) (\nu + 1)^{-1} (i_0 + Q). \quad (5.1.112)$$

Applying (5.1.99) and (5.1.107) to (5.1.112) gives the following equation for the location of the sonic point on a particular streamline:

$$m c^{2\alpha} = (\beta - 2) [(\nu + 1) (\beta - 1) (1 - \eta^{-2})]^{-1}. \quad (5.1.113)$$

Equations (5.1.96), (5.1.99), (5.1.102), (5.1.105), (5.1.107), (5.1.110), (5.1.111), and (5.1.113) represent the complete solution to the class of diabatic flow problems considered here, each member of the class being denoted by a different value of β , which is restricted to the interval $-2/\nu < \beta < 2$. In section 5.3, the solution for several particular values of β are computed and discussed, which illustrate the relation between the energy addition and the streamline pattern.

In the development of the canonical equations in Chapter 3.0, the parameter $l^2(\psi)$ was chosen so that $l^2 = d^2$, thus resulting in $d^{*2} = 1$ for a substitution flow. But since $q^* = q l^{-1}$, the "reduced velocity" was defined as $\omega = q a^{-1}$, where $a = d$ represents the ultimate velocity. Hence, the canonical system is concerned with a flow where $a^{*2} = d^{*2} = 1$, with $\omega = q a^{-1}$. The solution in this section also deals with flows where $i_0 = 1/2 d^2$ is a universal constant, and dividing (5.1.99) by $2 i_0$, it is evident that the quantity on the right represents the canonical form of the velocity, since $q^2 (2 i_0)^{-1} = q^2 a^{-2} = \omega^2$.

5.2 Analysis of a "Degenerate" Case

Before discussing specific examples of the analysis presented in section 5.1, the particular case $\beta = \nu^{-1}(\nu - 1)$, $\alpha = 0$, is investigated.

For the case $\alpha = 0$, the analysis presented in section 5.1 is valid up to point given by (5.1.29), and differs after that point. The function $\chi(x, \psi)$ defined in general by (5.1.27) and specifically by (5.1.71) and (5.1.72) is taken to be the following:

$$\chi(x, \psi) = -H(\psi), \quad (5.2.1)$$

and substituting (5.2.1) and the appropriate derivatives into (5.1.28) and (5.1.29), produces the following two equations respectively:

$$\gamma_{,\psi x} = \{H'' [2(i_0 + Q) - H'^2] + H'^2 H''\} \{2(i_0 + Q) - H'^2\}^{-3/2}, \quad (5.2.2)$$

$$\gamma_{,x\psi} = 0. \quad (5.2.3)$$

From (5.1.19), it is immediately evident that $p = 0$, and similarly from (5.1.25), it is apparent that $T = 0$. Hence, from (5.1.26), the following equations result:

$$Q_{,x} = 0, \quad Q_{,\psi} = 0, \quad (5.2.4)$$

which imply that Q is a constant, which is taken to be zero corresponding to $T = 0$. Hence, (5.2.2) and (5.2.3) become

$$\gamma_{,\psi x} = \{H'' [2i_0 - H'^2] + H'^2 H''\} \{2i_0 - H'^2\}^{-3/2}, \quad (5.2.5)$$

$$\gamma_{,x\psi} = 0. \quad (5.2.6)$$

Equating (5.2.5) and (5.2.6) results in the following equation:

$$2i_0 H'' = 0. \quad (5.2.7)$$

There are two possible cases to consider: (1) $i_0 = 0$, or (2) $H'' = 0$. Considering the first case, it is evident from the energy equation (5.1.4), that $q = 0$, since $p = Q = 0$. The second case yields the following relation by integration:

$$H' = \varepsilon_0, \quad (5.2.8)$$

where ε_0 is an arbitrary constant, and hence, the second part of (5.1.19) gives

$$v = -\chi_{,\psi} = H' = \varepsilon_0. \quad (5.2.10)$$

From (5.1.20), the following is obtained

$$u^2 = 2i_0 - H'^2 = 2i_0 - \varepsilon_0^2, \quad (5.2.11)$$

and the total velocity magnitude becomes

$$q^2 = u^2 + v^2 = 2i_0. \quad (5.2.12)$$

The last part of (5.1.18) is the equation of a streamline, and using (5.2.10) and (5.2.11), it becomes

$$\gamma_{,x} = v u^{-1} = \varepsilon_0 [2i_0 - \varepsilon_0^2]^{-1}, \quad (5.2.13)$$

and integrating partially with respect to x yields

$$\gamma = [2i_0/\varepsilon_0^2 - 1]^{-1} x + \varepsilon_1. \quad (5.2.14)$$

Equation (5.2.14) represents a family of streamline patterns, each member being associated with a particular value of the parameter ε_0 , and having straight streamlines with ultimate velocity $q^2 = 2i_0$ on every streamline. The parameter ε_0 changes the slope of the streamlines and the velocity components, but the total velocity is identical on each

streamline and for all members of the family. This family may be called degenerate, since the streamline patterns and the velocity can be computed but the pressure, density, temperature, and Q are all zero.

5.3 Particular Examples of the Family of Solutions

The analysis presented in section 5.1 is now illustrated by constructing several examples and discussing the influence of the external energy distribution on the streamline pattern.

In section 5.1, the analysis was restricted to $-2/\nu < \beta < 2$, corresponding to $-1 < \alpha < 1$, as can be seen in Fig. 1. The examples presented in this section all lie in the interval $-1/2 \leq \alpha \leq 1/2$, for reasons which are soon apparent.

In order to obtain the streamline pattern for a particular value of β , the integration specified in (5.1.96) must be carried out. At first, only the interval $-1/2 \leq \alpha < 0$ is considered, and (5.1.96) is rewritten as follows:

$$\tilde{y} = \int [m^{-2\alpha} - 1]^{-1/2} dm = \int [m^{1/b} - 1]^{-1/2} dm, \quad (5.3.1)$$

where $1/b = -2\alpha$, and since α is negative in the interval being considered, $1/b$ is positive and $b \geq 1$. For illustrative purposes, it is assumed that α takes on such values as to make $1/b$ a rational fraction, i.e. $b = 1, 2, \dots$. Letting $m = z^b$, and $dm = b z^{b-1} dz$, equation (5.3.1) becomes

$$\tilde{y} = \int [b z^{b-1}] [z - 1]^{-1/2} dz, \quad (5.3.2)$$

and by setting $z = \cosh^2 \varphi$, $dz = \cosh \varphi \sinh \varphi d\varphi$, equation (5.3.2) becomes the following:

$$\tilde{y} = \int 2b(1 + \sinh^2 \varphi)^{b-1} d(\sinh \varphi). \quad (5.3.3)$$

Equation (5.3.3) is readily integrated for $b = 1, 2, \dots$ and the result can then be easily expressed in terms of m . The restriction of α to the interval $-1/2 \leq \alpha < 0$, is now apparent, since for $-1 < \alpha < -1/2$, the exponent $(b-1)$ in (5.3.3) lies in the interval $-1/2 < (b-1) < 0$, and integration in terms of elementary functions appears quite formidable. Below, several examples of exact solutions are presented, all based on air as the medium for which $\nu = 7/5 = 1.4$.

Example 1: Consider the case where $b = 1$, which is associated with $\beta = -(3 - \nu)(2\nu)^{-1}$ and $\alpha = -1/2$. The integral (5.3.1) to be evaluated is

$$\tilde{y} = \int [m - 1]^{-1/2} dm, \quad (5.3.4)$$

and using (5.3.3), it is easily evaluated to give

$$\tilde{y} = \int 2 d(\sinh \varphi) = 2 \sinh \varphi = 2 \sqrt{m - 1} = 2 \sqrt{\tilde{x}/\eta - 1}. \quad (5.3.5)$$

The streamlines for this example are parabolas in the (\tilde{x}, \tilde{y}) plane, where η is a parameter denoting a particular streamline, and the streamline pattern is plotted in Fig. 2. The significance of this streamline pattern can be illustrated by computing the expressions for all of the kinematic and thermodynamic variables of the system, and investigating their behavior along the streamlines. The components of velocity and the total velocity can be obtained from (5.1.97), (5.1.98), and (5.1.99) in the following form:

$$v = \sqrt{2 i_0 \eta^{-1} (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/2}} \quad u^2 = 2 i_0 [1 - \eta \tilde{x}^{-1}], \quad (5.3.6)$$

$$q^2 = u^2 + v^2 = 2 i_0 [1 - \eta \tilde{x}^{-1} (1 - \eta^{-2})]. \quad (5.3.7)$$

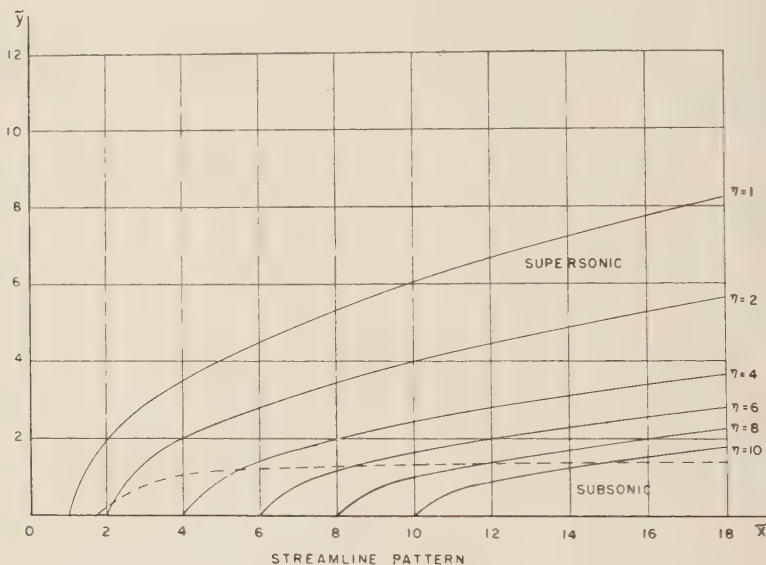


Fig. 2. $\alpha = -1/2$, $\beta = -(3 - \nu)/2\nu$

The sonic point on each streamline can be computed from (5.1.113), which has the following form for this example:

$$\tilde{x} \eta^{-1} = \frac{1}{3} (\nu + 3) (1 - \eta^{-2}), \quad (5.3.8)$$

and the sonic line is the locus of these points which is shown by a dotted line in Fig. 2. The energy distribution is given by (5.1.107) and has the following form:

$$Q = \frac{1}{3} (3 - \nu) i_0 (\nu - 1)^{-1} \eta \tilde{x}^{-1} (1 - \eta^{-2}). \quad (5.3.9)$$

The equation for entropy (5.1.110), has the following form:

$$(S - S_0) c_p^{-1} = \frac{1}{2} \nu^{-1} (3 - \nu) \ln \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{1/\nu} \frac{4}{3} i_0 (\eta \tilde{x}^{-1}) (1 - \eta^{-2}) \right\}, \quad (5.3.10)$$

and according to (5.1.111), the temperature is

$$T = \frac{1}{2} \nu (\nu - 1)^{-1} c_p^{-1} \eta \tilde{x}^{-1} (1 - \eta^{-2}). \quad (5.3.11)$$

It is now clear that the streamlines are designated by $\eta \geq 1$, with $\eta = 1$ being the limiting streamline on which the ultimate velocity $q^2 = 2 i_0$ exists at all points, and also $Q = 0$. If $\eta < 1$, then the temperature becomes negative and the entropy imaginary, which are inadmissible on a physical basis.

The expressions for pressure and density are obtained from (5.1.102) and (5.1.105) respectively, and have the following form:

$$p = \frac{1}{2} K_3 (2 i_0 k_2)^{3/2} \tilde{x}^{-3/2} (1 - \eta^{-2})^{-3/4}, \quad (5.3.12)$$

$$\rho = K_4 K_5 \tilde{x}^{-1/2} \eta^{-1} (1 - \eta^{-2})^\delta. \quad (5.3.13)$$

Since the variables p , ρ , T , Q , and $S - S_0$, are all inverse functions of \tilde{x} , it is evident that in the limit as \tilde{x} tends to infinity, all of these quantities approach zero, except the entropy, which approaches minus infinity. However, the velocity attains its ultimate value $q^2 = 2 i_0$ as \tilde{x} tends to infinity which corresponds to the conditions $p = 0$, and $Q = 0$. From the point where each streamline crosses the \tilde{x} axis, i.e. where $\tilde{x} = \eta$, the magnitudes of all the variables decrease with increasing \tilde{x} , except u , which is zero for $\tilde{x} = \eta$ and behaves in the opposite way. It was established in section 5.1 that the JACOBIAN of the transformation used in the analysis had the value $J_2 = \rho u$, and hence the point on each streamline where $u = 0$, i.e. the point on the \tilde{x} axis, is a singular point. Hence, the \tilde{x} axis seems to be some kind of a "limiting line" analogous to the well known limiting line in the hodograph plane.

Example 2: For the case when $b = 3$, the exponent $\alpha = -\frac{1}{6}$, and $\beta = 0$. It was mentioned in section 5.1, that the case $\beta = 0$ resulted in the solution obtained by KIEBEL [5] for isentropic flow. The results are given below without detailed computation for comparison with the other diabatic flow examples. The integral to be evaluated is

$$\tilde{y} = \int [m^{1/3} - 1]^{-1/2} dm, \quad (5.3.14)$$

and applying (5.3.3), the final result is

$$\tilde{y} = 6 \sqrt{m^{1/3} - 1} \left[1 + \frac{2}{3} (m^{1/3} - 1) + \frac{1}{5} (m^{1/3} - 1)^2 \right]. \quad (5.3.15)$$

The streamlines are plotted in Fig. 3, and, of course, are the same as those given by KIEBEL. The velocity components and total magnitude are given as follows:

$$v = \sqrt{2 i_0} \eta^{-1} (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/6}, \quad u^2 = 2 i_0 [1 - (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/3}], \quad (5.3.16)$$

$$q^2 = u^2 + v^2 = 2 i_0 [1 - (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/3} (1 - \eta^{-2})]. \quad (5.3.17)$$

The energy distribution and entropy are

$$Q = 0, \quad S = S_0, \quad (5.3.18)$$

and the sonic point on each streamline can be obtained from

$$(\tilde{x} \eta^{-1})^{1/3} = \frac{1}{2} (\nu + 1) (1 - \eta^{-2}). \quad (5.3.19)$$

In general the flow behaves in a similar manner to that discussed in example 1, i.e. the pressure, density, and temperature all approach zero as \tilde{x} tends to infinity, while the velocity attains its ultimate value $q^2 = 2 i_0$. There is also a singularity on each streamline at the point where it crosses the \tilde{x} axis, since $u = 0$ there.

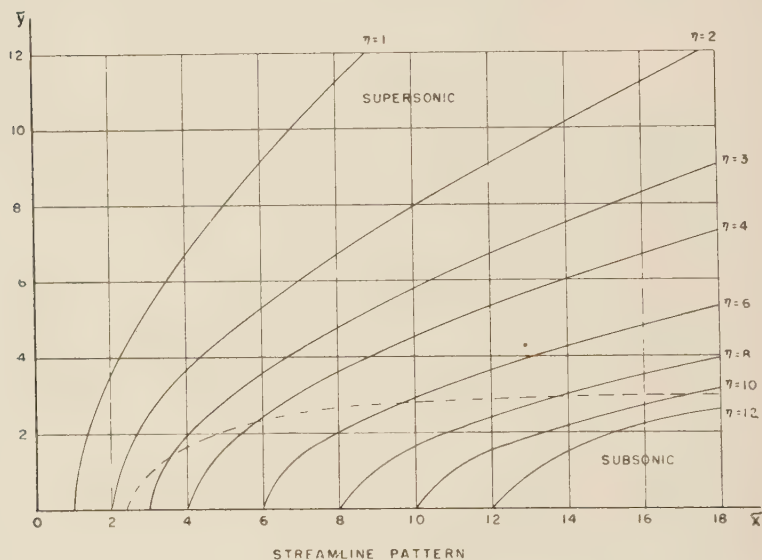


Fig. 3. $\alpha = -1/6$, $\beta = 0$

Example 3: When $b = 4$, $\beta = (7v - 9)(8v)^{-1}$, $\alpha = -1/8$, and the integral to be evaluated is

$$\tilde{y} = \int [m^{1/4} - 1]^{-1/2} dm, \quad (5.3.20)$$

and using (5.3.3), the following result is obtained:

$$\tilde{y} = 8 \sqrt{m^{1/4} - 1} \left[1 + (m^{1/4} - 1) + \frac{3}{5} (m^{1/4} - 1)^{3/2} + \frac{1}{7} (m^{1/4} - 1)^{5/2} \right]. \quad (5.3.21)$$

The kinematic and thermodynamic variables are given below:

$$v = \sqrt{2 i_0} \eta^{-1} (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/8}, \quad u^2 = 2 i_0 [1 - (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/4}], \quad (5.3.22)$$

$$q^2 = u^2 + v^2 = 2 i_0 [1 - (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/4} (1 - \eta^{-2})], \quad (5.3.23)$$

$$Q = -\frac{1}{9} (7v - 9)(v - 1)^{-1} i_0 (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/4} (1 - \eta^{-2}), \quad (5.3.24)$$

$$(S - S_0) c_p^{-1} = -\frac{1}{2} \nu^{-1} (7\nu - 9) \ln \left\{ \left(\frac{1}{8} \right)^{1/\nu} \frac{16}{9} i_0 (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/4} (1 - \eta^{-2}) \right\}, \quad (5.3.25)$$

$$T = \frac{1}{8} \nu (\nu - 1)^{-1} c_p^{-1} (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/4} (1 - \eta^{-2}). \quad (5.3.26)$$

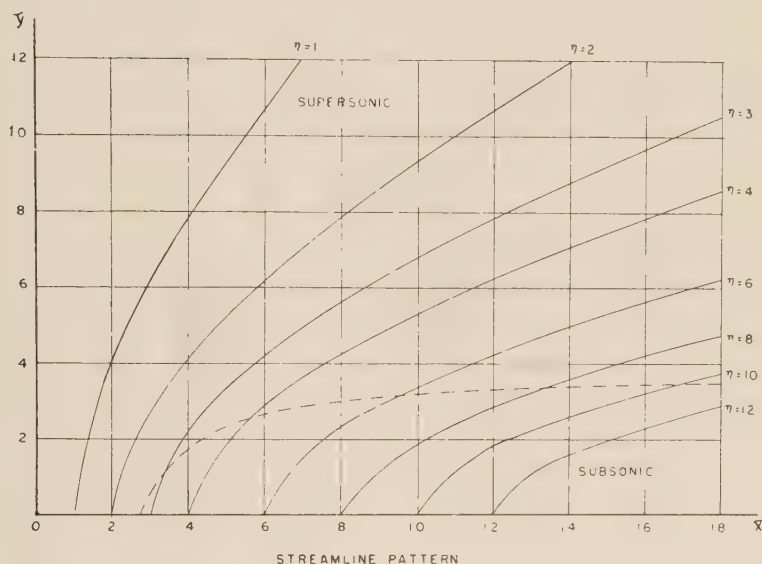


Fig. 4. $\alpha = -1/8$, $\beta = (7\nu - 9)/8\nu$

The streamline pattern for this example is plotted in Fig. 4, and the sonic line is shown dotted, which is computed from the following:

$$(\tilde{x} \eta^{-1})^{1/4} = \frac{1}{9} (\nu + 9) (1 - \eta^{-2}). \quad (5.3.27)$$

In this example, Q is negative but increasing towards zero as \tilde{x} tends to infinity, but the temperature is positive throughout the flow, although approaching zero as \tilde{x} tends to infinity. In general, the same remarks hold for this example as for the first.

The three examples above show remarkable similarity even though the energy distribution Q represents an entirely different condition for each example. In the first example, Q is positive but decreasing as \tilde{x} increases, in the second example $Q = 0$ throughout, and in the last example, Q is negative but increasing as \tilde{x} increases. Comparing the streamline patterns in Figs. 2, 3, and 4, respectively shows that when Q is positive, the streamlines curve more sharply than for the isentropic case, and when Q is negative, the streamlines curve less sharply.

The investigation of examples for $0 < \alpha \leq 1/2$ requires that the integral (5.1.96) be considered in the following form:

$$\tilde{y} = - \int m^{\alpha} [1 - m^{2\alpha}]^{-1/2} dm = - \int m^{1/t} [1 - m^{2/t}]^{-1/2} dm, \quad (5.3.28)$$

where $1/t = \alpha$, and for illustrative purposes it is assumed that α takes such values that $1/t$ is a rational fraction with $t = 2, 3, \dots$. Letting $z^2 = m^{2/t}$ and $dm = t z^{t-1} dz$ then (5.3.28) becomes

$$\tilde{y} = - \int t z^t [1 - z^2]^{-1/2} dz, \quad (5.3.29)$$

and setting $z = \sin \varphi$, $dz = \cos \varphi d\varphi$, (5.3.29) becomes

$$\tilde{y} = - \int t \sin^t \varphi d\varphi. \quad (5.3.30)$$

Equation (5.3.30) is easily integrated for $t = 2, 3, \dots$ and the result can then be expressed in terms of m .

Example 4: Consider the case for $t = 2$, $\beta = (3\nu - 1)(2\nu)^{-1}$, $\alpha = 1/2$, for which the following integral must be evaluated:

$$\tilde{y} = - \int m^{1/2} [1 - m]^{-1/2} dm. \quad (5.3.31)$$

Using (5.3.30), the integration of (5.3.31) yields

$$\tilde{y} = -\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi = -\arcsin \sqrt{m} + \sqrt{m(1-m)}. \quad (5.3.32)$$

The kinematic and thermodynamic variables are given below:

$$v = -\sqrt{2i_0} \eta^{-1} (\tilde{x} \eta^{-1})^{1/2}, \quad u^2 = 2i_0 [1 - m], \quad (5.3.33)$$

$$q^2 = u^2 + v^2 = 2i_0 [1 - (\tilde{x} \eta^{-1})(1 - \eta^{-2})], \quad (5.3.34)$$

$$Q = -(3\nu - 1)(\nu - 1)^{-1} i_0 \eta^{-1} \tilde{x} (1 - \eta^{-2}), \quad (5.3.35)$$

$$(S - S_0) c_p^{-1} = \frac{1}{2} \nu^{-1} (3\nu - 1) \ln \left\{ -4 \left(\frac{1}{2} \right)^{1/\nu} i_0 \eta^{-1} \tilde{x} (1 - \eta^{-2}) \right\}, \quad (5.3.36)$$

$$T = -\nu(\nu - 1) c_p^{-1} \eta^{-1} \tilde{x} (1 - \eta^{-2}), \quad (5.3.37)$$

$$\varrho = -K_4 K_5 (\eta \tilde{x}^{-1})^{3/2} \eta^{-1/2} (1 - \eta^{-2})^{-5/4}, \quad (5.3.38)$$

$$p = \frac{1}{2} K_3 (2i_0 k_2)^{-1/2} (\eta \tilde{x}^{-1})^{1/2} \eta^{-1/2} (1 - \eta^{-2})^{-1/4}. \quad (5.3.39)$$

It is observed for this example that temperature and density are negative throughout the flow for $\eta \geq 1$, and hence, a physical interpretation is impossible. In order to overcome this difficulty, streamlines for $\eta < 1$ might be considered, which makes the temperature positive, but the pressure and density then become imaginary. Hence, there appears to be no possible physical interpretation for this example, and no other examples are considered in the interval $0 < \alpha \leq 1/2$.

5.4 Polytropic Behavior of the Family of Solutions

For a diabatic flow to show polytropic behavior, it is necessary that the pressure-density-entropy relation (1.3.2) for diabatic flow be expressible as follows:

$$p = \vartheta \varrho^{\nu} \exp(S c_v^{-1}) = \vartheta \varrho^{\xi}, \quad (5.4.1)$$

where ζ is the polytropic exponent. Equating the last two expressions of (5.4.1), and solving for $S c_v^{-1}$ gives the following result:

$$S c_v^{-1} = \ln \rho^{\zeta - \nu}. \quad (5.4.2)$$

Hence, diabatic flows, which have their entropy expressed in the form (5.4.2), can be considered as obeying a polytropic law. This does not mean that a different gas is considered for each value of ζ , but merely that the addition of external energy causes the medium to behave according to a polytropic law.

In order to investigate the polytropic nature of the family of flows presented in section 5.1, it is necessary to compute ζ and to verify that (5.4.2) is satisfied for this family. The pressure and the density are given by (5.1.101) and (5.1.104) respectively, and can be written with simplified notation as follows:

$$p = Y_1(\psi) x^{\nu(\beta - 2)/(\nu + 1)}, \quad (5.4.3)$$

$$\rho = Y_2(\psi) x^{-(\beta\nu + 2)/(\nu + 1)}, \quad (5.4.4)$$

where Y_1 and Y_2 are constants along a streamline and can be neglected for the following considerations. If the polytropic law $p \sim \rho^{\zeta}$ is to be satisfied, it is apparent by comparison of (5.4.3) and (5.4.4) that the following relation must hold:

$$\nu(\beta - 2)(\nu + 1)^{-1} = -(\beta\nu + 2)(\nu + 1)^{-1}\zeta, \quad (5.4.5)$$

and solving for ζ yields

$$\zeta = \nu(2 - \beta)(\beta\nu + 2)^{-1}. \quad (5.4.6)$$

It is obvious that (5.4.6) reduces to the isentropic relation $\zeta = \nu$ as required for $\beta = 0$. The exponent $\zeta - \nu$, which appears in (5.4.2), can be computed from (5.4.6), and hence, equation (5.4.2) can be written in the form:

$$S c_v^{-1} = \ln \rho^{-\nu\beta(\nu + 1)/(\beta\nu + 2)}, \quad (5.4.7)$$

and using (5.4.4), this can be rewritten as

$$S c_v^{-1} = \ln [x^{\nu\beta} Y_3(\psi)], \quad \text{or} \quad S c_p^{-1} = \ln [x^{\beta} Y_4(\psi)], \quad (5.4.8)$$

where $Y_4(\psi)$ is some function of ψ . The last part of (5.4.8) is identical in form to (5.1.68), and hence, it has been established that all the members of the family of diabatic flows under consideration behave according to the polytropic law $p \sim \rho^{\zeta}$, where ζ is given by (5.4.6).

It is now possible to reformulate the results of section 5.1 given by (5.1.96) to (5.1.113). Consider first (5.1.96) for the interval $-1/2 \leq \alpha < 0$, which then has the form given by (5.3.1). Using (5.4.6), it is easily verified that the following relation is valid:

$$2(\zeta - 1)(\zeta + 1)^{-1} = -2\alpha = -2[\nu(\beta - 1) + 1][\nu + 1]^{-1}. \quad (5.4.9)$$

Hence, (5.1.96) or (5.3.1) for the interval $-1/2 \leq \alpha < 0$, can be rewritten in the following form:

$$\tilde{y} = \int [m^{2(\zeta - 1)/(\zeta + 1)} - 1]^{-1/2} dm. \quad (5.4.10)$$

Equation (5.4.10) is equivalent to (5.1.96) for $-1/2 \leq \alpha < 0$, and it is observed that it has the same form as the isentropic expression ($\beta = 0$), but with ζ appearing instead of v . The kinematic and thermodynamic variables can also be reformulated; for example, from (5.1.97), (5.1.98), and (5.1.107), the velocity components and the energy distribution can be expressed as follows:

$$v = \left[2 i_0 \eta^{-1} m^{-(\zeta-1)(\zeta+1)}, \quad u^2 = 2 i_0 [1 - m^{-2(\zeta-1)/(\zeta+1)}], \right. \quad (5.4.11)$$

$$Q = (\zeta - v) \zeta^{-1} (v - 1)^{-1} i_0 m^{-2(\zeta-1)/(\zeta+1)} (1 - \eta^{-2}), \quad (5.4.12)$$

from which it is evident that when $\zeta = v$, $Q = 0$.

6.0 Exact Solution of the Canonical Equations

The equations under consideration are the canonical equations of momentum and continuity given by (3.0.4) and (3.0.7) respectively, and rewritten below in vector notation as follows:

$$\bar{\omega} \cdot \text{grad } \bar{\omega} + (v - 1) (2v)^{-1} (1 - \omega^2 + 2\bar{Q}) \text{grad } \ln p = 0, \quad (6.0.1)$$

$$\text{div } [\bar{\omega} p (1 - \omega^2 + 2\bar{Q})^{-1}] = 0, \quad (6.0.2)$$

where $\bar{\omega}$ is the "reduced velocity" vector and $Q = Q a^{-2}$. For plane flow, this is a system of three equations in three unknowns, i.e. two components of $\bar{\omega}$ and the pressure, assuming that \bar{Q} is known.

The objective of this chapter is to show that the canonical system can be solved to obtain the same family of diabatic flows as developed in Chapter 5. For this particular problem, it is justifiable to use the polytropic law $p \sim \varrho^\zeta$, as established in section 5.4, and this results in an important simplification of the canonical form of the continuity equation (6.0.2). If $p = \vartheta \varrho^\zeta$, then (3.0.6) can be written as follows:

$$\varrho = [\tfrac{1}{2} v^{-1} (v - 1) a^2 \vartheta^{-1}]^{1/(\zeta-1)} (1 - \omega^2 + 2\bar{Q})^{1/(\zeta-1)}, \quad (6.0.3)$$

and substitution of (6.0.3) into (3.0.5) yields

$$\text{div } [\bar{\omega} (1 - \omega^2 + 2\bar{Q})^{1/(\zeta-1)}] = 0. \quad (6.0.4)$$

Equation (6.0.4) is the canonical form of the continuity equation if the flow has polytropic behavior, and it is considerably simplified over (6.0.2) since the pressure has been eliminated.

Dividing the momentum equation (6.0.1) by $(1 - \omega^2 + 2\bar{Q})$ and taking the curl, which eliminates the pressure, yields the following equation:

$$\text{curl } [(\bar{\omega} \cdot \text{grad } \bar{\omega}) (1 - \omega^2 + 2\bar{Q})^{-1}] = 0. \quad (6.0.5)$$

This equation involves only $\bar{\omega}$ and the known function \bar{Q} , and is referred to as a compatibility equation following the nomenclature of PRIM [8].

The system under consideration now consists of (6.0.4) and (6.0.5), which is a system of two equations with the two components of $\bar{\omega}$ as the unknowns, assuming \bar{Q} to be known. Since the particular problem under

discussion is the same as in Chapter 5, it is possible to specify \bar{Q} from (5.1.107 a) as follows:

$$2\bar{Q} = Q \left(\frac{1}{2} d^2\right)^{-1} = Q i_0^{-1} = -\beta(\nu + 1) (\nu - 1)^{-1} (2 - \beta) (1 - \omega^2), \quad (6.0.6)$$

since $q^2/2 i_0 = q^2/a^2 = \omega^2$. Substituting (6.0.6) into (6.0.4) and (6.0.5), it is readily verified that these two equations become the following:

$$\operatorname{div} [\bar{\omega} (1 - \omega^2)^{1/(\zeta-1)}] = 0 \quad (6.0.7)$$

$$\operatorname{curl} [(\bar{\omega} \cdot \operatorname{grad} \bar{\omega}) (1 - \omega^2)^{-1}] = 0. \quad (6.0.8)$$

Using the identity $\bar{\omega} \cdot \nabla \bar{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \omega^2 - \bar{\omega} \times \nabla \times \bar{\omega}$, it is possible to rewrite (6.0.8) in the following form:

$$\operatorname{curl} [(\bar{\omega} \times \nabla \times \bar{\omega}) (1 - \omega^2)^{-1}] = 0. \quad (6.0.9)$$

Equations (6.0.7) and (6.0.9) define the problem being investigated and these two equations are identical to the equations considered by PRIM [8] for isentropic flow, except that ζ appears instead of ν . Hence, PRIM's solution, which is equivalent to KIEBEL's [5] can be applied directly to this problem.

PRIM [8] assumed that $\bar{\omega}$ is of the following form:

$$\bar{\omega}(x, y) = i \bar{u}(y) + j \bar{v}_1(x) \bar{v}_2(y), \quad (6.0.10)$$

where i and j are unit vectors in the x and y directions, respectively, in a CARTESIAN coordinate system. The results of PRIM's analysis for the velocity components and the streamline pattern are given below, but with ν replaced by ζ :

$$\bar{u}^2 = (\zeta + 1) A^{-1} [A^2(\zeta + 1)^{-2} - 2 D(\zeta - 1)^{-1} \bar{v}_2^{-(\zeta-1)}], \quad (6.0.11)$$

$$\bar{v} \equiv \bar{v}_1 \bar{v}_2 = F \bar{v}_2^{-1/2(\zeta-1)}, \quad (6.0.12)$$

$$y = \int [A^2(\zeta + 1)^{-2} - 2 D(\zeta - 1)^{-1} \bar{v}_2^{-(\zeta-1)}]^{-1/2} d\bar{v}_2. \quad (6.0.13)$$

Consider the following transformation:

$$\begin{aligned} y &= L \tilde{y}, & \bar{v}_2 &= L \tilde{v}_2, & \tilde{v}_2 &= \eta^{2/(\zeta+1)} m^{2/(\zeta+1)}, \\ L^{-(\zeta-1)} &= 2(\zeta - 1) D^{-1}(\zeta + 1)^{-2} \eta^2, \\ F &= [(\zeta - 1) (2 D)^{-1}]^{-1/2} \frac{1}{2} (\zeta + 1) \eta^{-(\zeta+3)/(\zeta+1)}, \\ (\zeta + 1) A^{-1} &= \frac{1}{2} (\zeta + 1) \eta^{-2/(\zeta+1)}. \end{aligned} \quad (6.0.14)$$

Applying the transformation relations (6.0.14) to (6.0.11), (6.0.12) and (6.0.13), the following results are obtained:

$$\bar{u}^2 = [1 - m^{-2(\zeta-1)/(\zeta+1)}], \quad (6.0.15)$$

$$\bar{v} = \eta^{-1} m^{-(\zeta-1)/(\zeta+1)}, \quad (6.0.16)$$

$$y = \int [m^{2(\zeta-1)/(\zeta+1)} - 1]^{-1/2} dm. \quad (6.0.17)$$

It is now observed that the above three equations are precisely the same as (5.4.10) and (5.4.11), since the canonical form of the velocity components in (5.4.11) are $\bar{v} = v/\sqrt{2 i_0}$ and $\bar{u}^2 = u^2/2 i_0$. Hence, the

objective of this chapter has been accomplished, since it has been shown that the solution obtained by considering the canonical equations is equivalent to that obtained in Chapter 5.

Additional Remarks

Some considerations performed after the present work was finished indicate that one should retain the negative signs in front of square roots in eqs. (4.0.20) and (4.0.21). In Part I, it was assumed that this sign is a positive one. In the paragraph just following eq. (4.0.20) wherever the words "positive sign" appear referring to this root, the words "negative sign" should appear, and vice versa.

Bibliography

1. B. HICKS, Diabatic Flow of a Compressible Fluid. *Quarterly of Applied Mathematics*, pages 221—237, Vol. 6, 1948.
2. B. HICKS, On the Characterization of Fields of Diabatic Flow. *Quarterly of Applied Mathematics*, pages 405—412, Vol. 6, 1948.
3. B. HICKS, P. GUENTHER, and R. WASSERMAN, New Formulation of the Equations for Compressible Flow. *Quarterly of Applied Mathematics*, pages 357—361, Vol. 5, 1947.
4. B. HICKS, W. HEBRANK, and S. KRAVITZ, On the Characterization of Fields of Diabatic Flow, Part II. Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Maryland, Report No. 720, 1950.
5. I. A. KIEBEL, Exact Solutions of Equations of Gas Dynamics. NACA TM 1260, translated from Russian, 1950.
6. M. MUNK and R. PRIM, On the Multiplicity of Steady Gas Flows Having the Same Streamline Pattern. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, pages 137—141, Vol. 33, May 1947.
7. M. MUNK and R. PRIM, On the Canonical Form of the Equations of Steady Motion of a Perfect Gas. *Journal of Applied Physics*, pages 957—958, Vol. 19, October 1948.
8. R. PRIM, Steady Rotational Flow of Ideal Gases. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, pages 425—447, Vol. 1, 1952.
9. R. v. MISES, Notes on Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. Harvard University Graduate School of Engineering, Special Publication No. 2, 1949.

Zur Theorie relativistisch invarianter Spinwellengleichungen I.

Von

Hermann Donnert

Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg (Breisgau)*

(Eingegangen am 10. September 1956)

Vorbemerkungen

Es werden Möglichkeiten untersucht, relativistisch invariante Spinwellengleichungen unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen zu formulieren.

Die Numerierung der Formeln ist so vorgenommen, daß die erste Zahl den Paragraphen und die zweite die Formel kennzeichnet, also $(A \cdot B)$ ist Formel B in Paragraph A . Ein System aus Gleichungen mit verschiedener Kennzahl wird mit $(A \cdot B) + (C \cdot D) + \dots$ abgekürzt. Äquivalenz zweier Gleichungen wird mit $(A \cdot B) \sim (C \cdot D)$ gekennzeichnet, Identität mit $(A \cdot B) \equiv (C \cdot D)$ und sinngemäß analog für Gleichungssysteme mit einer oder mit mehreren Kennzahlen. Invarianz einer Gleichung oder eines Gleichungssystems gegen die Transformationen einer Gruppe \mathfrak{G} wird durch $(A \cdot B)$ inv. \mathfrak{G} angezeigt.

Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

Einleitung

Verschiedene Autoren haben bereits versucht, für Teilchen mit beliebiger halbganzer¹ Spinquantenzahl die zugehörigen relativistisch invarianten Wellengleichungen zu formulieren². Die Behandlung dieses Problems bereitet deshalb so große Schwierigkeiten, weil im allgemeinen Fall das experimentelle Material bei weitem nicht ausreicht, um aus der großen Zahl mathematisch und physikalisch möglicher Ansätze diejenigen auszusondern, die in der Natur realisiert sind; ja, man weiß gar nicht, ob es in der Natur Teilchen höheren Spins gibt. Unter einem Teilchen verstehen wir hier ein „punktförmiges“ Gebilde³ mit Masse-, Ladungs- und Spineigenschaften; auf den Begriff des Elementarteilchens wollen wir hier verzichten, denn was man als Elementarteilchen, was als zusammengesetztes Teilchen bezeichnet, ist nach dem heutigen Forschungsstande Definitionssache⁴, so daß ich allgemein den Begriff

* Neue Anschrift: Dr. HERMANN J. DONNERT, CWL, Rad. Div., Army Chemical Center Edgewood, Md., USA.

Teilchen im Sinne von „punktförmiges“ Gebilde mit Masse-, Ladungs- und Spineigenschaften“ benützen möchte, ohne auf diesbezügliche Streitfragen einzugehen. Bekanntlich ist das Photon in dem dargelegten Sinn das einzige Teilchen, dem bislang mit Sicherheit der Spin 1 zuzuordnen ist; ob es noch andere Teilchen mit Spin 1 oder noch höherem Spin gibt, ist eine völlig offene Frage; nur die Existenz von Teilchen mit Spin 0 und 1/2 ist experimentell sichergestellt. Andererseits ist die Frage zu bejahen, ob man sich auf Grund dieser Tatsachen mit der Behandlung von Theorien für Teilchen höheren Spins befassen soll. Es gibt nämlich unter den bekannten Teilchen einige, über deren Spin man noch keine gesicherten Aussagen machen kann; diese sind aber nur möglich, wenn man die Folgerungen einer Theorie mit den experimentellen Ergebnissen vergleichen kann, was aber die Kenntnis einer geeigneten Theorie voraussetzt.

In der vorliegenden Arbeit soll nun eine klassische Feldtheorie für Teilchen beliebigen halbganzen Spins unter möglichst allgemeinem Gesichtspunkt entwickelt und zu den bisherigen theoretischen Ansätzen in Beziehung gebracht werden.

§ 1. Grundforderungen an die Theorie

Um für unser vorliegendes Problem, eine möglichst allgemeine Theorie für Wellenfelder beliebigen halbganzen Spins zu formulieren, einen Ausgangspunkt zu haben, müssen wir aus unserer physikalischen Naturerkenntnis Erfahrungstatsachen heranziehen, deren Gültigkeit wir als Grundlage unserer Theorie benützen; unser Ansatz für die Theorie muß dann so formuliert werden, daß er diesem Erfahrungsmaterial gerecht wird.

Wir wollen daher an unseren theoretischen Ansatz folgende zwei Forderungen stellen, deren Berechtigung wir aus unserer physikalischen Erfahrung begründen:

(I) Unsere Theorie muß mit den Erkenntnissen der speziellen Relativitätstheorie im Einklang stehen.

(II) Unsere Theorie muß mit den Grundprinzipien der Quantenmechanik verträglich sein und sich dem gebräuchlichen Formalismus der Quantentheorie in den wesentlichen Punkten einfügen.

Diese beiden Forderungen wollen wir in unserem Ansatz in folgender Weise realisieren:

(A) Alle Gleichungen der Theorie müssen gegen die Transformationen der vollen LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 invariant sein.

(B) Alle Komponenten der Wellenfunktion ψ_N müssen für den Fall kräftefreier Teilchen der KLEIN-SCHRÖDINGER-GORDON-Gleichung genügen⁵ (s. z. B. [50], [51], [52], [53]):

$$(\square - \kappa^2) \psi_N \equiv (\partial_u \partial_u - \kappa^2) \psi_N = 0 \quad (1.1)$$

Gl. (1.1) ist offensichtlich relativistisch invariant, wenn die Komponenten ψ_N der Wellenfunktion in geeigneter Weise durch \mathfrak{L}_4 transformiert

werden, somit ist die Forderung (A) erfüllt. Gl. (1.1) sichert die Gültigkeit der Energie-Impuls-Beziehung in der relativistisch invarianten Form⁶:

$$c^2 p^2 + m^2 c^4 = E^2 \quad (1.2)$$

§ 2. Lorentzinvariante Formulierung durch Spinorgleichungen

(s. [37] bis [45])

Wir können nun unser Postulat (A), daß alle Wellengleichungen gegen die Transformationen der vollen LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 invariant sein müssen, in der größtmöglichen Allgemeinheit dadurch befriedigen, daß wir alle Gleichungen in Form von Spinorgleichungen anschreiben. Damit werden die Komponenten der Wellenfunktion ψ_N zu Komponenten von Spinoren und die Invarianz des Gleichungssystems (1.1) gegen die Transformationsgruppe \mathfrak{L}_4 ist immer realisierbar.

Nach B. L. VAN DER WAERDEN repräsentieren Spinortransformationen sämtliche Möglichkeiten einer Darstellung der Transformationen der eigentlichen LORENTZ-Gruppe⁷ \mathfrak{L}_4^+ durch lineare Transformationen. Wir betrachten einen Spinor vom Rang $r = M + N$

$$a \begin{matrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_M \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_N \end{matrix}$$

der in allen Indexpaaren $(\dot{\mu}_A, \dot{\mu}_B)$ und (ν_A, ν_B) , für $A \neq B$,

$$A \in \left(1, 2, \dots, \begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix} \right), \quad B \in \left(1, 2, \dots, \begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix} \right),$$

symmetrisch ist, was wir vollsymmetrisch nennen wollen, und $(M+1)(N+1) = X$ linear unabhängige Komponenten hat; er gehört zu einem invarianten Teilraum $\mathfrak{R}_{(M+1)(N+1)}$ unseres Darstellungs-

raumes. Der vollsymmetrische Spinor $a \begin{matrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_M \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_N \end{matrix}$ transformiert sich

nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{M/2, N/2}$ der unimodularen⁸ Gruppe c_2 vom Range 2. Alle möglichen irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_{M/2, N/2}$ mit $M = 0, 1, 2, \dots$; $N = 0, 1, 2, \dots$; schöpfen alle irreduziblen Darstellungsmöglichkeiten der c_2 durch lineare Transformationen aus. Die eigentliche LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4^+ ist zweieindeutig homomorph⁹ der Gruppe c_2 , das heißt c_2 ist eine zweideutige Darstellung der \mathfrak{L}_4^+ . Alle irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_{M/2, N/2}$ der c_2 mit $M = 0, 1, 2, \dots$; $N = 0, 1, 2, \dots$; sind auch irreduzible, höchstens zweideutige Darstellungen der \mathfrak{L}_4^+ und repräsentieren alle Möglichkeiten für eine irreduzible Darstellung der \mathfrak{L}_4^+ durch lineare Transformationen. Dabei sind $\mathfrak{D}_{1/2, 0}$ und $\mathfrak{D}_{0, 1/2}$ die irreduziblen Darstellungen der c_2 durch sich selbst und damit zweideutige, irreduzible Darstellungen der \mathfrak{L}_4^+ , $\mathfrak{D}_{1/2, 1/2}$ ist die natürlich eindeutige, irreduzible Darstellung der \mathfrak{L}_4^+ durch sich selbst. Allgemein ist die irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}_{M/2, N/2}$ eine eindeutige, irreduzible Darstellung der \mathfrak{L}_4^+ , wenn $M + N \equiv 0(2)$ ist, hingegen ist die irreduzible Darstellung zweideutig für $M + N \equiv 1(2)$.

Durch vollsymmetrischen Spinoren $a \begin{smallmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_M \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_N \end{smallmatrix}$ sind alle Arten von Größen erfaßt, die bei Transformationen der Gruppe \mathfrak{L}_4^+ eine lineare Transformationsgruppe erleiden.

Es gibt auch Spinoren, die nicht in allen Paaren gleichartiger Indizes symmetrisch sind. Diese gehören zu vollreduziblen Darstellungen der \mathfrak{c}_2 bzw. der \mathfrak{L}_4^+ und lassen sich immer in eine Summe von endlich vielen, vollsymmetrischen Spinoren ausreduzieren, was einer Ausreduktion der vollreduziblen Darstellung unserer Transformationsgruppe \mathfrak{c}_2 bzw. \mathfrak{L}_4^+ nach einer direkten Summe $\sum_U \oplus \sum_V \oplus \mathfrak{D}_{U/2, V/2}$ von irreduziblen Darstellungen in endlicher Anzahl entspricht; dabei treten als Summanden entweder nur eindeutige, irreduzible Darstellungen der \mathfrak{L}_4^+ oder nur zweideutige, irreduzible Darstellungen der \mathfrak{L}_4^+ auf.

Die KRONECKERSche Produktdarstellung zweier irreduzibler Darstellungen $\mathfrak{D}_{K/2, L/2}$ und $\mathfrak{D}_{M/2, N/2}$ läßt sich immer nach einer endlichen, direkten Summe von irreduziblen Darstellungen ausreduzieren. Es gilt:

$$\mathfrak{D}_{K/2, L/2} \times \mathfrak{D}_{M/2, N/2} = \sum_{U=K+M}^{|K-M|} \oplus \sum_{V=L+N}^{|L-N|} \oplus \mathfrak{D}_{U/2, V/2} \quad (2.1)$$

Damit läßt sich jede irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}_{M/2, N/2}$ als KRONECKERsche Produktdarstellung irreduzibler Darstellungen ausdrücken:

$$\mathfrak{D}_{M/2, N/2} = \mathfrak{D}_{M/2, 0} \times \mathfrak{D}_{0, N/2} \quad (2.2)$$

Alle Gleichungen zwischen Spinoren sind gegen Transformationen der eigentlichen LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4^+ invariant. Umgekehrt läßt sich jede gegen die Transformationsgruppe \mathfrak{L}_4^+ invariante Beziehung in Form von Spinorgleichungen schreiben¹⁰.

Unsere Theorie soll aber gegen die Transformationen der vollen LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 invariant sein. Bekanntlich läßt sich die volle LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 durch die eigentliche LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4^+ wie folgt darstellen:

$$\mathfrak{L}_4 = \mathfrak{L}_4^+ + S \mathfrak{L}_4^+ \quad (2.3)$$

\mathfrak{L}_4^+ umfaßt alle LORENTZ-Transformationen mit der Koeffizientendeterminante +1; S ist eine LORENTZ-Transformation, die das räumliche Koordinatensystem am Ursprung spiegelt, die Richtung des Zeitablaufes aber ungeändert läßt, also

$$x_N' = S x_N = -x_N \quad \text{für} \quad N = 1, 2, 3; \quad x_4' = S x_4 = +x_4 \quad (2.4)$$

mit

$$|S| = -1 \quad (2.5)$$

Die Neben­gruppe $S \mathfrak{L}_4^+$ umfaßt alle LORENTZ-Transformationen mit der Koeffizientendeterminante -1. Die räumliche Spiegelung S trans-

formiert unseren Spinor $a \begin{smallmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_M \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_N \end{smallmatrix}$ nach

$$S a \begin{matrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_M \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_N \end{matrix} = \tilde{a} \begin{matrix} \dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2 \dots \dot{\nu}_N \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_M \end{matrix} \quad (2.6);$$

ist der Spinor $a \begin{matrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_M \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_N \end{matrix}$ vollsymmetrisch und gehört er zum invarianten Darstellungsraum $\mathfrak{R}_{(M+1)(N+1)}$ der irreduziblen Darstellung

$\mathfrak{D}_{M/2, N/2}$, so ist auch $\tilde{a} \begin{matrix} \dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2 \dots \dot{\nu}_N \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_M \end{matrix}$ vollsymmetrisch und gehört zum

invarianten Darstellungsraum $\mathfrak{R}_{(N+1)(M+1)}$ der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{N/2, M/2}$. Daher ist der Darstellungsraum $\mathfrak{R}_{(M+1)(N+1)} \oplus \mathfrak{R}_{(N+1)(M+1)}$

invariant gegen die \mathfrak{L}_4 und die direkte Summe der beiden zugehörigen irreduziblen Darstellungen der \mathfrak{L}_4^+ , $\mathfrak{D}_{M/2, N/2} \oplus \mathfrak{D}_{N/2, M/2}$, ist irre-

duzible Darstellung der \mathfrak{L}_4 . Ist der Spinor $a \begin{matrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_M \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_N \end{matrix}$ nicht voll-

symmetrisch, sondern vollreduzibel nach der Summe der irreduziblen

Darstellungen $\sum_U \oplus \sum_V \oplus \mathfrak{D}_{U/2, V/2}$ der \mathfrak{L}_4^+ , dann ist $\tilde{a} \begin{matrix} \dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2 \dots \dot{\nu}_N \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_M \end{matrix}$ vollreduzibel nach $\sum_V \oplus \sum_U \oplus \mathfrak{D}_{V/2, U/2}$.

Zu einer vorgegebenen Spinorgleichung, die gegen \mathfrak{L}_4^+ invariant ist, läßt sich immer eine zweite Spinorgleichung angeben derart, daß das System der beiden Spinorgleichungen gegen die volle LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 invariant ist. Es kann auch der Sonderfall auftreten, daß eine Spinorgleichung nicht nur gegen \mathfrak{L}_4^+ , sondern auch gegen \mathfrak{L}_4 invariant ist; in diesem Sonderfall ist die Ergänzungsgleichung mit der vorgelegten Gleichung identisch und die Erweiterung durch eine zweite Gleichung wird überflüssig. Umgekehrt kann man jede gegen \mathfrak{L}_4 invariante Beziehung als System zweier Spinorgleichungen formulieren, in Sonderfällen genügt dazu eine einzige Spinorgleichung; man muß nur darauf achten, daß die Invarianz gegen die Transformation S und damit eo ipso gegen die \mathfrak{L}_4 gesichert ist.

§ 3. Transformationsverhalten von Spinoren gegen die räumliche Drehgruppe \mathfrak{d}_3 und die räumliche Drehspiegelgruppe \mathfrak{D}_3 .

(s. [37 b], [38], [39], [40], [47])

Die räumliche Drehgruppe \mathfrak{d}_3 in den Koordinaten x_1, x_2, x_3 ist eine Untergruppe der \mathfrak{L}_4^+ . Vermittels der Homomorphie $\mathfrak{L}_4^+ \sim \mathfrak{c}_2$ induziert die \mathfrak{d}_3 in der \mathfrak{c}_2 die unitäre Untergruppe \mathfrak{u}_2 . Die \mathfrak{u}_2 ist zweieindeutig homomorph der \mathfrak{d}_3 , und zwar ist die \mathfrak{u}_2 eine zweideutige Darstellung der \mathfrak{d}_3 ¹¹. Die irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{U}_{Q/2}$ der Gruppe \mathfrak{u}_2 , die wegen der Homomorphie $\mathfrak{d}_3 \sim \mathfrak{u}_2$ auch irreduzible, höchstens zweideutige Darstellungen der \mathfrak{d}_3 sind, sind unitär¹² und repräsentieren mit dem Wertebereich $Q = 0, 1, 2, \dots$ alle Möglichkeiten irreduzibler Darstellungen der \mathfrak{u}_2 und auch der \mathfrak{d}_3 durch lineare Transformationen. Dabei ist $\mathfrak{U}_{1/2}$ die irreduzible Darstellung der \mathfrak{u}_2 durch sich selbst und damit

eine zweideutige, irreduzible Darstellung der \mathfrak{d}_3 , \mathfrak{u}_1 ist die natürlich eindeutige, irreduzible Darstellung der \mathfrak{d}_3 durch sich selbst. Allgemein ist die irreduzible Darstellung $\mathfrak{u}_{Q/2}$ für $Q \equiv 0(2)$ eine eindeutige, für $Q \equiv 1(2)$ eine zweideutige, irreduzible Darstellung der \mathfrak{d}_3 . Die KRONFCKERSche Produktdarstellung zweier irreduzibler, unitärer Darstellungen $\mathfrak{u}_{P/2}$ und $\mathfrak{u}_{Q/2}$ läßt sich wieder nach einer endlichen direkten Summe irreduzibler Darstellungen voll ausreduzieren:

$$\mathfrak{u}_{P/2} \times \mathfrak{u}_{Q/2} = \sum_{R=P+Q}^{|P-Q|} \oplus \mathfrak{u}_{R/2} \quad (3.1)$$

Die irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}_{M/2, N/2}$ der \mathfrak{Q}_4^+ zerfällt bei der Beschränkung auf die \mathfrak{d}_3 nach der Gleichung:

$$\mathfrak{D}_{M/2, N/2} \rightarrow \sum_{Q=M+N}^{|M-N|} \oplus \mathfrak{u}_{Q/2} \quad (3.2)$$

also in eine Summe irreduzibler Darstellungen der \mathfrak{d}_3 , wobei Vollreduzibilität besteht. Gl. (3.2) bewirkt, daß der Spinor $a \begin{smallmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_M \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_N \end{smallmatrix}$ bei der Einschränkung der Transformationsgruppe von der \mathfrak{Q}_4^+ auf \mathfrak{d}_3 in mehrere unabhängige Systeme zerfällt, außer für $M \cdot N = 0$. Für den Fall $M = 0$ oder $N = 0$ vereinfacht sich (3.2) zu:

$$\mathfrak{D}_{M/2, 0} \rightarrow \mathfrak{u}_{M/2} \quad (3.3)$$

$$\mathfrak{D}_{0, N/2} \rightarrow \mathfrak{u}_{N/2} \quad (3.4)$$

Weiters folgt aus (3.2) durch Vertauschung von M und N :

$$\mathfrak{D}_{N/2, M/2} \rightarrow \sum_{Q=M+N}^{|M-N|} \oplus \mathfrak{u}_{Q/2} \quad (3.5)$$

Betrachtet man das Transformationsverhalten bezüglich der vollen orthogonalen Gruppe, auch Drehspiegelgruppe genannt, $\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{d}_3 + S \mathfrak{d}_3$, also einschließlich aller Transformationen, die S als multiplikativen Bestandteil enthalten, dann muß man den zu $\mathfrak{u}_{Q/2}$ gehörigen Darstellungsraum $\mathfrak{R}'_{(Q+1)}$ durch einen ebenfalls zu $\mathfrak{u}_{Q/2}$ gehörigen weiteren Darstellungsraum $\mathfrak{R}''_{(Q+1)}$ ergänzen, daß $\mathfrak{R}'_{(Q+1)}$ und $\mathfrak{R}''_{(Q+1)}$ bezüglich Transformationen aus \mathfrak{d}_3 invariante Darstellungsräume sind, während sie bei der Transformation S ihre Rollen vertauschen¹³. Der gesamte Darstellungsraum $\mathfrak{R}'_{(Q+1)} \oplus \mathfrak{R}''_{(Q+1)}$ läßt sich immer derart in die Summe zweier zu $\mathfrak{u}_{Q/2}$ gehöriger invarianter Darstellungsräume $\mathfrak{R}_{(Q+1)}^{(+)}$ $\oplus \mathfrak{R}_{(Q+1)}^{(-)}$ zerlegen, daß die Komponenten im Unterraum $\mathfrak{R}_{(Q+1)}^{(-)}$ den Spiegelungscharakter $+1$, die im Unterraum $\mathfrak{R}_{(Q+1)}^{(+)}$ hingegen den Spiegelungscharakter -1 haben^{13a}; $\mathfrak{R}_{(Q+1)}^{(+)}$ und $\mathfrak{R}_{(Q+1)}^{(-)}$ sind invariante Unterräume bezüglich $\mathfrak{u}_{Q/2}$ und bezüglich der räumlichen Spiegelung S .

§ 4. Spin und irreduzible Darstellung der räumlichen Drehgruppe \mathfrak{d}_3 .

(s. z. B. [46], [47], [48], [38], [39], [54], [55], [62])

Wir wollen im folgenden nur Teilchen mit endlicher Ruhmasse $m = \kappa \hbar/c \neq 0$ betrachten¹⁴, so daß die Geschwindigkeit des Teilchens $v < c$ ist. Weiters wollen wir annehmen, daß kein äußeres Kraftfeld auf das Teilchen wirke. Wir können dann durch eine LORENTZ-Transformation immer in ein Ruhssystem des Teilchens übergehen oder in ein Bezugssystem, in dem sich das Teilchen mit einer Geschwindigkeit $0 \leq v \ll c$ bewegt, so daß unrelativistische Behandlung des Problems zulässig ist.

Untersuchen wir nun, wie wir ein Teilchen von Spin s im unrelativistischen Fall beschreiben können. Wir müssen die von den Koordinaten $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ und der Zeit $t = x_4/ic$ abhängige Beschreibung durch eine weitere Variable σ ergänzen, die dem Spinverhalten Rechnung trägt. Im Gegensatz zu x_1, x_2, x_3, x_4 mit kontinuierlichem Wertebereich kann σ nur die $2s + 1$ diskreten Werte $s - N, N = 0, 1, \dots, 2s$ annehmen entsprechend der durch Richtungsquantelung bedingten Einstellmöglichkeiten des Spins in eine bestimmte Raumrichtung (vgl. etwa [46], S. 142 ff.). Die Wellenfunktion läßt sich darstellen:

$$\psi(\mathbf{r}, t, \sigma) = \sum_{\sigma} \psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t) \mathbf{x}_{\sigma} \quad (4.1)$$

Dies entspricht einer Zerlegung des HILBERT-Raumes \mathfrak{H} , den wir bei unserer Beschreibung benützen, als direktes Produkt:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{R}_{(\mathbf{r}, t)} \times \mathfrak{R}'_{(2s+1)} \quad (4.2)$$

Dabei sind die Vektoren \mathbf{x}_{σ} aus (4.1) eine Basis in $\mathfrak{R}'_{(2s+1)}$.

Der Drehimpuls äußert sich im Transformationsverhalten der Wellenfunktion bezüglich der räumlichen Drehgruppe \mathfrak{d}_3 , die unser ausgewähltes Bezugssystem so transformiert, daß die Voraussetzungen für unrelativistische Beschreibung erhalten bleiben, Ruhssystem bleibt dabei Ruhssystem. Das Transformationsverhalten jeder Komponente $\psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ vermöge ihrer funktionalen Abhängigkeit von \mathbf{r} beschreibt bekanntlich einen Bahndrehimpuls $J \cdot \hbar$, $J = 0, 1, 2, \dots$, wenn sich $\psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ nach der irreduziblen, unitären Darstellung \mathfrak{U}_J der \mathfrak{d}_3 transformiert; der Operator einer infinitesimalen Drehung ist $\mathfrak{J} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$, der Operator des Bahndrehimpulses ist $\mathfrak{L} = (\hbar/i) \mathfrak{J} = (\hbar/i) [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ und hat bei einer Funktion $\psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$, die sich nach \mathfrak{U}_J transformiert, die $2J + 1$ Eigenwerte $\hbar(J - N)$, $N = 0, 1, 2, \dots, 2J$. Der Bahndrehimpuls gehört bei unserer Beschreibung in den Anteil $\mathfrak{R}_{(\mathbf{r}, t)}$ von \mathfrak{H} .

Das Transformationsverhalten der $\psi_{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ bezüglich \mathfrak{d}_3 mittels ihrer Abhängigkeit von der Spinkoordinate σ beschreibt den Spin s bzw. den Spindrehimpuls $s \cdot \hbar$. Der Raum $\mathfrak{R}'_{(2s+1)}$ hat für ein Teilchen vom Spin s die Dimension $2s + 1$. Da $\mathfrak{R}'_{(2s+1)}$ bei der \mathfrak{d}_3 eine irreduzible Transformationsgruppe¹⁵ erleiden soll, muß er sich nach der irreduziblen, unitären Darstellung \mathfrak{U}_s der \mathfrak{d}_3 transformieren. Fassen wir

die Komponenten $\psi_\sigma(\mathbf{r}, t)$ zu einer Spaltenmatrix $\Psi'(\mathbf{r}, t) = \{\psi_\sigma(\mathbf{r}, t)\}$, $\sigma = +s, +s-1, +s-2, \dots, -s+2, -s+1, -s$ zusammen, dann ist der durch den Index σ bedingte Operator einer infinitesimalen Transformation der \mathfrak{d}_3 gegeben durch $\mathfrak{J}' = i\vec{\sigma}$, der des Spindrehimpulses durch $\mathfrak{S}' = \hbar\vec{\sigma} - \hbar/i\mathfrak{J}'$. Die Komponenten $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \vec{\sigma}$ sind Matrizen mit $2s+1$ Zeilen und Spalten, die die $2s+1$ Eigenwerte $s-N$, $N=0, 1, 2, \dots, 2s$, haben und die Vertauschungsrelationen $\sigma_k \sigma_l - \sigma_l \sigma_k = i\sigma_m$, $(k, l, m) = A_{(3)}(1, 2, 3)^{16}$ erfüllen¹⁷.

Der Operator einer infinitesimalen Transformation aus \mathfrak{d}_3 von $\Psi'(\mathbf{r}, t)$ ist damit gegeben durch $\mathfrak{J} + \mathfrak{J}'$, der Operator des Gesamtdrehimpulses durch $\vec{A} = \mathfrak{L} + \mathfrak{S}' = (\hbar/i)[\mathbf{r}, \nabla] + \hbar\vec{\sigma}$; die möglichen Eigenwerte ergeben sich aus der Produkttransformation

$$\mathfrak{U}_J \times \mathfrak{U}_s = \sum_{Q=s+J}^{|s-J|} \oplus \mathfrak{U}_Q \text{ zu } Q = N, N=0, 1, 2, \dots, 2Q \text{ und } Q = s+J, \\ s+J-1, s+J-2, \dots, |s-J|.$$

Will man unsere unrelativistischen Darstellungsmöglichkeiten für das Wellenfeld vom Spin s vollkommen erfassen, muß man die Kovarianzforderung auf die volle $\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{d}_3 + S\mathfrak{d}_3$ erweitern. Dann wird der HILBERT-Raum der Darstellung zu:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{R}_{(\mathbf{r}, t)} \times \{\mathfrak{R}'_{(2s+1)} \oplus \mathfrak{R}''_{(2s+1)}\} = \mathfrak{R}_{(\mathbf{r}, t)} \times \{\mathfrak{R}_{(2s+1)}^{(+)} \oplus \mathfrak{R}_{(2s+1)}^{(-)}\} \quad (4.3)$$

Dann ist die Wellenfunktion $\Psi'(\mathbf{r}, t)$ zu ergänzen durch eine zweite äquivalente $\Psi''(\mathbf{r}, t)$, so daß:

$$S\Psi' = \Psi'', \quad S\Psi'' = \Psi' \quad (4.4)$$

die Gesamtwellenfunktion wird:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi'(\mathbf{r}, t) \oplus \Psi''(\mathbf{r}, t). \quad (4.5)$$

Der Operator des Spindrehimpulses wird:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' \oplus \mathfrak{S}'', \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{S}'' = \mathfrak{S}' \quad (4.6)$$

der Operator der Transformation S wird:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & +E \\ +E & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

wobei E die Einheitsmatrix vom Rang $2s+1$ bedeutet. Man kann die Wellenfunktion auch darstellen als

$$\Psi^*(\mathbf{r}, t) = \Psi_{(\mathbf{r}, t)}^{(+)} \oplus \Psi_{(\mathbf{r}, t)}^{(-)} \quad (4.8)$$

wo

$$\Psi^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi' + \Psi''), \quad \Psi^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi' - \Psi'') \quad (4.9)$$

und damit:

$$S\Psi^{(+)} = +\Psi^{(+)}, \quad S\Psi^{(-)} = -\Psi^{(-)} \quad (4.10)$$

Die Wellenfunktionen $\Psi^{(+)}$ und $\Psi^{(-)}$ unterscheiden sich durch den Spiegelungscharakter $+1$ oder -1 . Die unitäre Transformation (4.9) hat die Form:

$$U = \frac{+1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +E & +E \\ +E & -E \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{+1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} +E & +E \\ -E & -E \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

die Gl. (4.6) ist gegen diese Transformation invariant, der Operator

$$S = \begin{pmatrix} 0 & +E \\ +E & 0 \end{pmatrix} \text{ wird zu } S^* = USU^{-1} = \begin{pmatrix} +E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

§ 5. Relativistisch invariante Wellenfunktionen für das Teilchen vom Spin s .

(s. z. B. [1] bis [9], [24], [37], [42], [43], [44])

Für unsere relativistisch invariante Darstellung des Wellenfeldes vom Spin s müssen wir nun so verfahren, daß im unrelativistischen Grenzfall unsere obigen Darstellungseigenschaften erhalten bleiben. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, unser Wellenfeld durch die vollsymmetrischen Spinoren

$${}_a \begin{pmatrix} +Q \\ \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

beschreiben; sie gehören zur irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{(s+Q)/2, (s-Q)/2}$ der \mathfrak{L}_4^+ . Weil wir für unsere Beschreibung aber Invarianz gegen die volle $\mathfrak{L}_4 = \mathfrak{L}_4^+ + S \mathfrak{L}_4^+$ fordern, muß mit dem vollsymmetrischen

Spinor ${}_a \begin{pmatrix} +Q \\ \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q} \end{pmatrix}$, Transformation nach $\mathfrak{D}_{(s+Q)/2, (s-Q)/2}$,

auch der vollsymmetrische Spinor ${}_a \begin{pmatrix} -Q \\ \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q} \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q} \end{pmatrix}$, Transformation nach $\mathfrak{D}_{(s-Q)/2, (s+Q)/2}$, enthalten sein. Beide Spinoren sind Kovarianten bezüglich der \mathfrak{L}_4^+ , bei räumlicher Spiegelung S gilt:

$$\begin{aligned} S {}_a \begin{pmatrix} +Q \\ \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q} \end{pmatrix} &= {}_a \begin{pmatrix} -Q \\ \dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2 \dots \dot{\nu}_{s-Q} \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{s+Q} \end{pmatrix} \\ S {}_a \begin{pmatrix} -Q \\ \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q} \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q} \end{pmatrix} &= {}_a \begin{pmatrix} +Q \\ \dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2 \dots \dot{\nu}_{s+Q} \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{s-Q} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Der Parameter Q durchläuft die Werte: $Q = \pm s, \pm (s-1), \pm (s-2), \dots, \pm 1, \pm 0$ für $2s \equiv 0(2)$ und $Q = \pm s, \pm (s-1), \pm (s-2), \dots, \pm 3/2, \pm 1/2$ für $2s \equiv 1(2)$. Das Wertepaar $Q = \pm 0$ für $2s \equiv 0(2)$,

bedarf noch einer Erklärung: ein Spinor ${}_a \begin{pmatrix} +0 \\ \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_s \end{pmatrix}$ trans-

formiert sich bezüglich \mathfrak{L}_4^+ kovariant nach $\mathfrak{D}_{s/2, s/2}$; bei räumlicher Spiegelung geht er aber im allgemeinen nicht in sich selbst über sondern

in einen anderen Spinor ${}_a \begin{pmatrix} -0 \\ \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_s \end{pmatrix}$, der zur selben irreduziblen

Darstellung $\mathfrak{D}_{s/2, s/2}$ von \mathfrak{L}_4^+ gehört. Reduziert man die Darstellungen im $\mathfrak{R}'_{(s+1)(s+1)} \oplus \mathfrak{R}''_{(s+1)(s+1)}$ nach der $\mathfrak{L}_4 = \mathfrak{L}_4^+ + S \mathfrak{L}_4^+$ oder auch $\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{d}_3 + S \mathfrak{d}_3$ aus, dann erhält man:

$$2u^{(\pm)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s}{v_1 v_2 \dots v_s} = a \frac{(+0) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s}{v_1 v_2 \dots v_s} \pm a \frac{(-0) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s}{v_1 v_2 \dots v_s} \quad (5.3)$$

$u^{(\pm)}$ transformiert sich bei \mathfrak{L}_4^+ nach $\mathfrak{D}_{s/2, s/2}$, bei S nach

$$S u^{(+)} = + u^{(+)}, \quad S u^{(-)} = - u^{(-)},$$

so daß beide Werte $+1$ und -1 für den Spiegelungscharakter auftreten^{18, 19}. Für $Q \neq \pm 0$ läßt sich eine Ausreduktion im $\mathfrak{R}'_{(s+Q+1)(s-Q+1)} \oplus \mathfrak{R}''_{(s-Q+1)(s+Q+1)}$ nur mehr nach der $\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{d}_3 + S \mathfrak{d}_3$ durchführen, nicht mehr aber bezüglich der vollen $\mathfrak{L}_4 = \mathfrak{L}_4^+ + S \mathfrak{L}_4^+$.

Benützen wir zur relativistischen Beschreibung die beiden Feldspinoren

$$a \frac{(+Q) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q}}{v_1 v_2 \dots v_{s+Q}} \quad \text{und} \quad a \frac{(-Q) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q}}{v_1 v_2 \dots v_{s+Q}},$$

dann ist die Kovarianz bezüglich der \mathfrak{L}_4 gesichert; dabei ist $Q = s, s-1, s-2, \dots, 1, 0$ für $2s \equiv 0(2)$ und $Q = s, s-1, s-2, \dots, 3/2, 1/2$ für $2s \equiv 1(2)$. Außer im Fall $Q = s$ tritt dabei noch eine Komplikation auf: gehen wir zum unrelativistischen Grenzfall über, was der Reduktion $\mathfrak{L}_4 \rightarrow \mathfrak{D}_3$ der LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 auf ihre Untergruppe \mathfrak{D}_3 , die räumliche Drehspiegelgruppe, entspricht, dann zerfällt unsere irreduzible Darstellung der \mathfrak{L}_4 nach:

$$\mathfrak{D}_{(s+Q)/2, (s-Q)/2} \oplus \mathfrak{D}_{(s-Q)/2, (s+Q)/2} \rightarrow \sum_{T=2s}^{2|Q|} \oplus \mathfrak{U}_{T/2} \oplus \sum_{T=2s}^{2|Q|} \oplus \mathfrak{U}_{T/2} \quad (5.4)$$

für $Q = s$ vereinfacht sich (5.4) zu:

$$\mathfrak{D}_{s, 0} \oplus \mathfrak{D}_{0, s} \rightarrow \mathfrak{U}_s \oplus \mathfrak{U}_s \quad (5.5)$$

Wir erhalten daher nur im Fall $Q = s$ nach (5.5) die richtige irreduzible Darstellung der \mathfrak{D}_3 im unrelativistischen Grenzfall. Für $Q \neq s$ enthält der unrelativistische Grenzfall neben der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{U}_s \oplus \mathfrak{U}_s$, die zum Spin s gehört, noch die irreduziblen Darstellungen

$$\sum_{R=s-1}^{2|Q|} \oplus (\mathfrak{U}_R \oplus \mathfrak{U}_R),$$

die zu den Spinwerten $s-1, s-2, \dots, |Q|+1, |Q|$ gehören. Diese überzähligen irreduziblen Darstellungen müssen durch geeignete Nebenbedingungen ausgeschlossen werden, so daß sich die Zahl der unabhängigen Komponenten der vollsymmetrischen Spinoren

$$a \frac{(+Q) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q}}{v_1 v_2 \dots v_{s+Q}} \quad \text{und} \quad a \frac{(-Q) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q}}{v_1 v_2 \dots v_{s+Q}}$$

von je $Z_{|Q|} = (s + Q + 1)(s - Q + 1)$, also insgesamt $2 Z_{|Q|}$, auf je $Z_s = 2s + 1$, also insgesamt auf $2 Z_s = 2(2s + 1)$ reduziert. Diese Nebenbedingungen müssen natürlich gegen die Gruppe \mathfrak{L}_4^+ und a fortiori gegen die Gruppe \mathfrak{L}_4 invariant sein. Eine Nebenbedingung, die dies gerade leistet ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \dot{\mu}_{s+Q}} a^{(+Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \dot{\mu}_{s-Q}} a^{(-Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} (5.6) \\ \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \end{array}$$

das Gleichungssystem (5.6) ist gegen die Gruppe \mathfrak{L}_4 invariant, derart, daß jede der Spinorgleichungen für sich gegen \mathfrak{L}_4^+ invariant ist, bei räumlicher Spiegelung S vertauschen sie wegen (5.2) ihre Rollen. (5.6) besteht aus $2(Q + s)(Q - s)$ Differentialgleichungen, die die Zahl der unabhängigen Komponenten der beiden vollsymmetrischen Feldspinoren von $2 Z_{|Q|}$ auf $2(2s + 1)$ reduzieren. Für $Q = s$ läßt sich (5.6) nicht definieren; dies ist aber gerade der Fall, wo nach (5.5) keine Nebenbedingungen erforderlich sind, die beiden vollsymmetrischen Spinoren $a^{(+s)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{2s}$ und $a^{(-s)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{2s}$ haben von Natur aus nur je $2s + 1$, also insgesamt $2(2s + 1)$ unabhängige Komponenten.

§ 6. Wellengleichungen für das Wellenfeld kräftefreier Teilchen mit Spin s . (s. z. B. [1] bis [9], [44])

Wir wollen unser Wellenfeld für Teilchen vom Spin s durch die beiden vollsymmetrischen Spinoren

$$a^{(+Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} \quad \text{und} \quad a^{(-Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q}$$

$\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q} \qquad \qquad \qquad \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q}$

beschreiben, die im kräftefreien Fall für $Q \neq s$ die Gln. (5.6) befriedigen sollen; Wertebereich für Q ist: $Q = s, s - 1, s - 2, \dots, 1, 0$ für $2s \equiv 0(2)$, $Q = s, s - 1, s - 2, \dots, 3/2, 1/2$ für $2s \equiv 1(2)$. Als Feldgleichungen für den kräftefreien Fall fordern wir nach (B):

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) a^{(+Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} &= 0 \\ (\square - \kappa^2) a^{(-Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} (6.1) \\ \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \end{array}$$

$\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q} \qquad \qquad \qquad \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q}$

(6.1) ist offensichtlich gegen \mathfrak{L}_4 invariant, derart, daß jede der Spinorgleichungen für sich gegen \mathfrak{L}_4^+ invariant ist, während S nach (5.2) die Rollen der beiden Spinorgleichungen vertauscht. Unsere Wellengleichun-

gen (6.1) sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x_1, x_2, x_3, x_4 , die Nebenbedingungen (5.6) enthalten nur Ableitungen von erster Ordnung.

Es ist nun meistens üblich, das Wellenfeld durch Differentialgleichungen erster Ordnung in x_1, x_2, x_3, x_4 zu beschreiben, was aber nicht unbedingt nötig ist, das heißt, man könnte auch mit den Wellengleichungen (6.1), zusammen mit den allenfalls erforderlichen Nebenbedingungen (5.6) das Auslangen finden. Wir wollen aber, um den Vergleich mit Ansätzen anderer Autoren, die durchwegs mit Differentialgleichungen erster Ordnung als Feldgleichungen operieren, zu ermöglichen, unseren in (6.1) + (5.6) getroffenen Ansatz so modifizieren, daß wir äquivalente Feldgleichungen erhalten, in denen nur mehr erste Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 auftreten.

Zu diesem Ende definieren wir für $s > 0$ die beiden vollsymmetrischen Spinoren $a^{(+Q-1)}$ und $a^{(-Q-1)}$ für die Werte $Q = s, s-1, s-2, \dots, 2, 1$ bei $2s \equiv 0(2)$ und $Q = s, s-1, s-2, \dots, 3/2, 1/2$ bei $2s \equiv 1(2)$:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\dot{\mu}_{s+Q} \nu_{s-Q+1}} a^{(+Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} &= i \kappa a^{(+Q-1)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q-1} \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q} &\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q+1} \\ \partial_{\dot{\mu}_{s-Q+1} \nu_{s+Q}} a^{(-Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q} &= i \kappa a^{(-Q-1)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q+1} \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q} &\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q-1} \end{aligned} \right\} \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (6.2)$$

wobei $a^{(+Q)}$ und $a^{(-Q)}$ vollsymmetrische Spinoren sind. Der ausgeschlossene Fall $s = 0$ muß gesondert behandelt werden. Die notwendigen Symmetriebedingungen für $a^{(+Q-1)}$ und $a^{(-Q-1)}$, das heißt solche, die durch die a priori eingeführte Vollsymmetrie von $a^{(+Q)}$ und $a^{(-Q)}$ nicht eo ipso erfüllt sind, lauten:

$$\left. \begin{aligned} a^{(+Q-1)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q-1} \varepsilon^{\nu_{s-Q} \nu_{s-Q+1}} &= 0 \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q+1} \\ a^{(-Q-1)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q+1} \varepsilon_{\dot{\mu}_{s-Q} \dot{\mu}_{s-Q+1}} &= 0 \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q-1} \end{aligned} \right\} \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (6.3)$$

für $Q \neq s$; für $Q = s$ sind keine zusätzlichen Symmetriebedingungen erforderlich. Für $Q \neq s$ folgt aus (6.2) + (6.3):

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\dot{\mu}_{s+Q}}^{\nu_{s-Q}} a^{(+Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} &= 0 \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q} \\ \partial_{\dot{\mu}_{s-Q}}^{\nu_{s+Q}} a^{(-Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q} &= 0 \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q} \end{aligned} \right\} \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (6.4)$$

Die für $Q \neq s$ zu fordernden Nebenbedingungen (5.6) sind mit (6.4) identisch. Benützt man also die Definition (6.2) + (6.3), dann sind diese für $Q \neq s$ notwendigen Nebenbedingungen (5.6) eo ipso erfüllt und müssen nicht mehr gesondert berücksichtigt werden.

Führt man die Definition (6.2) in unsere Wellengleichungen (6.1) ein, dann kann man diese ersetzen durch:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\dot{\mu}_{s+Q} \nu_{s-Q+1}} a^{(+Q-1)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q-1} &= \\ &= i \kappa a^{(+Q)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q}}{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q}} \\ \partial^{\dot{\mu}_{s-Q+1} \nu_{s+Q}} a^{(-Q-1)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q+1} &= \\ &= i \kappa a^{(-Q)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q}}{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q}} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} (6.5) \\ \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \end{array}$$

Wir haben somit aus den Gln. (6.1) + (5.6) unter Benützung der Definitionsgleichungen (6.2) + (6.3) die Feldgleichungen (6.5) hergeleitet. Umgekehrt erhält man aus (6.2) + (6.3) + (6.5) durch Elimination von $a^{(+Q-1)}$ und $a^{(-Q+1)}$ das Gleichungssystem (6.1) + (5.6), das wir zur Beschreibung des Feldes mit Spin s angesetzt haben. Es besteht für unsere Gleichungssysteme die Äquivalenzbeziehung: (6.1) + (5.6) \sim (6.2) + (6.3) + (6.5). Das Gleichungssystem (6.2) + (6.3) + (6.5) enthält aber Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 nur von höchstens erster Ordnung.

Es gibt noch eine zweite Möglichkeit, um ein zu (6.1) + (5.6) äquivalentes Gleichungssystem zu gewinnen, welches in den Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 von höchstens erster Ordnung ist. Wir definieren dazu zwei vollsymmetrische Spinoren $a^{(+Q+1)}$ und $a^{(-Q+1)}$, wo $Q = s - 1, s - 2, \dots, 1, 0$ für $2s \equiv 0(2)$ und $Q = s - 1, s - 2, \dots, +1/2, -1/2$ für $2s \equiv 1(2)$ ist:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\dot{\mu}_{s+Q+1} \nu_{s-Q}} a^{(+Q+1)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} &= \\ &= i \kappa a^{(+Q+1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q+1}}{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q-1}} \\ \partial^{\dot{\mu}_{s-Q} \nu_{s+Q+1}} a^{(-Q+1)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q} &= \\ &= i \kappa a^{(-Q+1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q-1}}{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q+1}} \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} (6.6) \\ \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \end{array}$$

wobei $a^{(+Q)}$ und $a^{(-Q)}$ vollsymmetrische Spinoren sind. Als notwendige Symmetriebedingungen, die noch nicht durch die Vollsymmetrie von $a^{(+Q)}$ und $a^{(-Q)}$ eo ipso erfüllt sind, sind zu fordern:

$$\left. \begin{aligned} a^{(+Q+1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q+1}}{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q-1}} \varepsilon^{\dot{\mu}_{s+Q} \dot{\mu}_{s+Q+1}} &= 0 \\ a^{(-Q+1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q-1}}{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q+1}} \varepsilon^{\nu_{s+Q} \nu_{s+Q+1}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} (6.7) \\ \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \end{array}$$

damit ist die Vollsymmetrie von $a^{(+Q+1)}$ und $a^{-(Q+1)}$ sichergestellt. Aus (6.6) und (6.7) folgt wiederum:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{v_{s-Q}} a^{(+Q)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q}}{v_1 v_2 \dots v_{s-Q}} &= 0 \\ \partial^{v_{s+Q}} a^{(-Q)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q}}{v_1 v_2 \dots v_{s+Q}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (6.8)$$

Da jetzt $Q = s$ schon ausgeschlossen ist, besteht die Identität von (6.8) mit den Nebenbedingungen (5.6). Wegen (6.6) kann man an Stelle von (6.1) schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\dot{\mu}_{s+Q+1} v_{s-Q}} a^{(+Q+1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q+1}}{v_1 v_2 \dots v_{s-Q-1}} &= \\ &= i \kappa a^{(+Q)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q}}{v_1 v_2 \dots v_{s-Q}} \\ \partial^{\dot{\mu}_{s-Q} v_{s+Q+1}} a^{-(Q+1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q-1}}{v_1 v_2 \dots v_{s+Q+1}} &= \\ &= i \kappa a^{(-Q)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s}{v_1 v_2 \dots v_{s+Q}} \end{aligned} \right\} \quad \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (6.9)$$

Umgekehrt kann man aus (6.6) + (6.9) durch Elimination von $a^{(+Q+1)}$ und $a^{-(Q+1)}$ wiederum die Gln. (6.1) ableiten. Es besteht somit die Äquivalenzbeziehung: (6.1) + (5.6) \sim (6.6) + (6.7) + (6.9). Das Gleichungssystem (6.6) + (6.7) + (6.9) enthält aber Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 nur von höchstens erster Ordnung.

Substituiert man in (6.2) + (6.5) $Q = Q' + 1$, dann erhält man (6.6) + (6.9), umgekehrt führt die Substitution $Q = Q'' - 1$ (6.6) + (6.9) in (6.2) + (6.5) über. Durch die Identität von (6.2) + (6.5) mit (6.6) + (6.9) für benachbarte Werte von Q folgt unter Beachtung der Vollsymmetrie aller Feldspinoren, wodurch (6.3) und (6.7) eo ipso erfüllt sind, die Äquivalenz aller Gleichungen (6.1) + (5.6) \sim (6.2) + (6.5) \sim (6.6) + (6.9) unabhängig vom Wert des Parameters Q^{20} , für den man jeden zulässigen Wert einsetzen darf. Welchen der zulässigen Werte für Q man nun bei der Beschreibung eines kräftefreien Teilchens und seines Wellenfeldes vom Spin s verwenden will, ist willkürlich wegen der gezeigten Äquivalenz aller Wellengleichungen unabhängig vom Wert des Parameters Q . Wegen des dargelegten Zusammenhanges zwischen den Ansätzen (6.2) + (6.5) und (6.6) + (6.9) für vollsymmetrische Spinoren erfaßt man bereits mit den Gln. (6.2) + (6.5) für vollsymmetrische Spinoren mit Q als willkürlichem Parameter, der den Wertebereich $Q = s, s-1, s-2, \dots, 2, 1$ für $2s \equiv 0(2)$ und $Q = s, s-1, s-2, \dots, 3/2, 1/2$ für $2s \equiv 1(2)$ durchlaufen kann, alle Möglichkeiten, Wellengleichungen für kräftefreie Teilchen mit Spin s zu formulieren, die in den Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 von höchstens

erster Ordnung sind; dabei besteht natürlich für alle möglichen Werte von Q die dargelegte Äquivalenz der Ansatzgleichungen (6.2) + (6.5); wir können uns daher auf diesen Ansatz beschränken, wenn unsere Wellengleichungen in den Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 von höchstens erster Ordnung sein sollen; über den freien Parameter Q , der alle äquivalenten Ansatzgleichungen vom Typ (6.2) + (6.5) erzeugt, wollen wir vorerst noch nicht verfügen. Wesentliche Unterschiede zwischen unseren möglichen, im kräftefreien Fall äquivalenten Ansätzen (6.2) + (6.5) oder damit äquivalent (6.1) + (5.6), die durch die mögliche Variation des freien Parameters Q entstehen, können erst dann auftreten, wenn man Wellenfelder untersuchen will, die Teilchen mit Spin unter dem Einfluß von Kräften beschreiben, etwa elektrisch geladene Teilchen mit magnetischem Spinmoment unter der Einwirkung eines äußeren elektromagnetischen Feldes²¹; diese Auswahlmöglichkeit macht sich erst für $s > 1$ bemerkbar.

Man kann der Vollsymmetrie aller in den Gln. (6.2) + (6.5) auftretenden Spinoren durch eine symmetrische Formulierung der Gleichungen Rechnung tragen. Man schreibe (6.2) + (6.5) wie folgt in die symmetrisierte Form um:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{a=1}^{Q+1} \partial_{\dot{\mu}_L \nu_K} a (+Q) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{L-1} \dot{\mu}_L \dot{\mu}_{L+1} \dots \dot{\mu}_{s+Q} &= \\ &= i(s-Q+1) \kappa a (+Q-1) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{L-1} \dot{\mu}_{L+1} \dots \dot{\mu}_{s+Q} \\ &\quad \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{K-1} \nu_K \nu_{K+1} \dots \nu_{s-Q+1} \\ \sum_{a=1}^{Q+1} \partial_{\dot{\mu}_K \nu_L} a (-Q) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{K-1} \dot{\mu}_K \dot{\mu}_{K+1} \dots \dot{\mu}_{s-Q+1} &= \\ &= i(s-Q+1) \kappa a (-Q-1) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q+1} \\ &\quad \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{L-1} \nu_L \nu_{L+1} \dots \nu_{s+Q} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &(6.10) \\ &\text{inv. } \mathfrak{L}_4 \end{aligned}$$

alle $L = 1, 2, \dots, s+Q$;

$$\left. \begin{aligned} \sum_{a=1}^{+Q} \partial_{\dot{\mu}_L \nu_K} a (+Q-1) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{L-1} \dot{\mu}_{L+1} \dots \dot{\mu}_{s+Q} &= \\ &= i(s+Q) \kappa a (+Q) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} \\ &\quad \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{K-1} \nu_K \nu_{K+1} \dots \nu_{s-Q+1} \\ \sum_{a=1}^{+Q} \partial_{\dot{\mu}_K \nu_L} a (-Q-1) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{K-1} \dot{\mu}_K \dot{\mu}_{K+1} \dots \dot{\mu}_{s-Q+1} &= \\ &= i(s+Q) \kappa a (-Q) \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q+1} \\ &\quad \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s+Q} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &(6.11) \\ &\text{inv. } \mathfrak{L}_4 \end{aligned}$$

für alle $K = 1, 2, \dots, s-Q+1$. Damit ist offensichtlich der Vollsymmetrie aller Feldspinoren Rechnung getragen.

§ 7. Explizite Spinorformulierung der Wellengleichungen

für $s = 1/2, 1$ und $3/2$.
(s. auch [1] bis [9], [42])

An den Ansätzen für die Fälle $s = 1/2, 1$ und $3/2$ lassen sich alle wesentlichen Punkte demonstrieren, so daß wir die zugehörigen Wellengleichungen hier explizite anschreiben wollen.

Für $s = 1/2$ lautet der Ansatz nach (6.1) + (5.6):

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) a^{(+1/2)\mu} &= 0 \\ (\square - \kappa^2) a^{(-1/2)\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (7.1)$$

Nebenbedingungen vom Typ (5.1) treten für $s = 1/2$ nicht auf, weil $\mathfrak{D}_{1/2,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,1/2} \rightarrow \mathfrak{U}_{1/2} \oplus \mathfrak{U}_{1/2}$ durch $\mathfrak{L}_4 \rightarrow \mathfrak{D}_3$ zerfällt; die Zahl unabhängiger Komponenten der Wellenfunktion ist $2Z_{1/2} = 4$, wie es nach unseren Betrachtungen in § 5 sein muß.

Für $s = 1$ ergeben sich nach (6.1) + (5.6) die beiden äquivalenten Möglichkeiten:

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) a^{(+1)\mu\kappa} &= 0 \\ (\square - \kappa^2) a^{(-1)\mu\lambda} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (7.2)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) a^{(+0)\mu} &= 0 \\ (\square - \kappa^2) a^{(-0)\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (7.3)$$

Zu (7.2) sind keine Nebenbedingungen notwendig, weil $\mathfrak{D}_{1,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,1} \rightarrow \mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_1$ durch $\mathfrak{L}_4 \rightarrow \mathfrak{D}_3$ zerfällt. Zu (7.3) sind die beiden Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\mu}^{\nu} a^{(+0)\mu} &= 0 \\ \partial_{\mu}^{\nu} a^{(-0)\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (7.4)$$

erforderlich, weil $\mathfrak{D}_{1/2,1/2} \oplus \mathfrak{D}_{1/2,1/2} \rightarrow (\mathfrak{U}_1 \oplus \mathfrak{U}_1) \oplus (\mathfrak{U}_0 \oplus \mathfrak{U}_0)$ durch $\mathfrak{L}_4 \rightarrow \mathfrak{D}_3$ zerfällt. Die Zahl der unabhängigen Komponenten beträgt in beiden Fällen $2Z_1 = 6$.

Für $s = 3/2$ kann man nach (6.1) + (5.6) die beiden äquivalenten Systeme

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) a^{(+3/2)\mu\kappa\dot{\alpha}} &= 0 \\ (\square - \kappa^2) a^{(-3/2)\mu\lambda\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (7.5)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) a^{(+1/2)\mu\kappa} &= 0 \\ (\square - \kappa^2) a^{(-1/2)\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (7.6)$$

ansetzen. Zu (7.5) sind keine Nebenbedingungen notwendig, weil $\mathfrak{D}_{3/2,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,3/2} \rightarrow \mathfrak{U}_{3/2} \oplus \mathfrak{U}_{3/2}$ durch $\mathfrak{L}_4 \rightarrow \mathfrak{D}_3$ zerfällt. Zu (7.6) hingegen sind noch die Nebenbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\kappa}^{\nu} a^{(+1/2)\mu\kappa} &= 0 \\ \partial_{\mu}^{\lambda} a^{(-1/2)\mu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{inv. } \mathfrak{L}_4 \quad (7.7)$$

zu fordern, weil die Reduktion $\mathfrak{L}_4 \rightarrow \mathfrak{D}_3$ den Zerfall $\mathfrak{D}_{1,1/2} \oplus \mathfrak{D}_{1/2,1} \rightarrow (\mathfrak{U}_{3/2} \oplus \mathfrak{U}_{3/2}) \oplus (\mathfrak{U}_{1/2} \oplus \mathfrak{U}_{1/2})$ induziert. Die Zahl der unabhängigen Komponenten beträgt in beiden Fällen $2Z_{3/2} = 8$.

Verlangt man hingegen, daß die Wellengleichungen von höchstens erster Ordnung in den Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 sind, dann erhält man nach (6.2) + (6.5) für $s = 1/2$ das mit (7.1) äquivalente System mit der Multiplizität 2:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\mu\nu} a^{(+1/2)\mu} &= i\kappa a^{(-1/2)\nu} \\ \partial^{\mu\nu} a^{(-1/2)\nu} &= i\kappa a^{(+1/2)\mu} \end{aligned} \right\} \quad (7.8) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Der Ansatz (7.8) ist mit der DIRAC-Gleichung $\{\gamma_n \partial_n + \kappa\} \varphi = 0$ isomorph; er läßt sich bei geeigneter Wahl der Matrizen γ_n aus der DIRAC-Gleichung herleiten²².

Für $s = 1$ ergibt sich aus (6.2) + (6.5) das mit den Gln. (7.2) \sim (7.3) + (7.4) äquivalente System für vollsymmetrische Spinoren:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\kappa\nu} a^{(+1)\mu\kappa} &= i\kappa a^{(+0)\mu}_{\nu} \\ \partial^{\kappa\nu} a^{(+0)\mu}_{\nu} &= i\kappa a^{(+1)\mu\kappa} \\ \partial^{\mu\lambda} a^{(-1)_{\nu\lambda}} &= i\kappa a^{(-0)\mu}_{\nu} \\ \partial'_{\mu\lambda} a^{(-0)\mu}_{\nu} &= i\kappa a^{(-1)_{\nu\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (7.9) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei die Symmetriebedingungen

$$a^{(+1)\mu\kappa} \varepsilon_{\mu\kappa} = 0 \quad \text{und} \quad a^{(-1)_{\nu\lambda}} \varepsilon^{\nu\lambda} = 0 \quad (7.10) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

natürlich erfüllt sein müssen. Man kann noch (7.9) nach (6.10) + (6.11) in symmetrisierter Form anschreiben:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\kappa\nu} a^{(+1)\mu\kappa} &= i\kappa a^{(+0)\mu}_{\nu} \\ \partial^{\kappa\nu} a^{(+0)\mu}_{\nu} + \partial^{\mu\nu} a^{(+0)\kappa}_{\nu} &= 2i\kappa a^{(+1)\mu\kappa} \\ \partial^{\mu\lambda} a^{(-1)_{\nu\lambda}} &= i\kappa a^{(-0)\mu}_{\nu} \\ \partial_{\mu\lambda} a^{(-0)\mu}_{\nu} + \partial_{\mu\nu} a^{(-0)\lambda}_{\nu} &= 2i\kappa a^{(-1)_{\nu\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (7.11) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

die Symmetriebedingungen $a^{(+1)\mu\kappa} \varepsilon_{\mu\kappa} = 0$ und $a^{(-1)_{\nu\lambda}} \varepsilon^{\nu\lambda} = 0$ sind durch den Ansatz (7.11) zwangsläufig erfüllt. Die beiden Nebenbedingungen (7.4) sind als notwendige Folge von (7.9) + (7.10) und von (7.11) immer erfüllt. Wir haben somit für $s = 1$ folgende äquivalente Ansätze: (7.2) \sim (7.3) + (7.4) \sim (7.9) + (7.10) \sim (7.11).

Für $s = 3/2$ erhält man nach (6.2) + (6.5) die mit (7.5) \sim (7.6) + (7.7) äquivalenten Ansätze für vollsymmetrische Spinoren:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\alpha\nu} a^{(+3/2)\mu\kappa\alpha} &= i\kappa a^{(+1/2)\mu\kappa}_{\nu} \\ \partial^{\alpha\nu} a^{(+1/2)\mu\kappa}_{\nu} &= i\kappa a^{(+3/2)\mu\kappa\alpha} \\ \partial^{\mu\beta} a^{(-3/2)_{\nu\lambda\beta}} &= i\kappa a^{(-1/2)_{\mu}}_{\nu\lambda} \\ \partial_{\mu\beta} a^{(-1/2)_{\mu}}_{\nu\lambda} &= i\kappa a^{(-3/2)_{\nu\lambda\beta}} \end{aligned} \right\} \quad (7.12) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\kappa\lambda} a^{(+1/2)\mu\kappa}_{\nu} &= i\kappa a^{(-1/2)_{\mu}}_{\nu\lambda} \\ \partial^{\kappa\lambda} a^{(-1/2)_{\mu}}_{\nu\lambda} &= i\kappa a^{(+1/2)\mu\kappa}_{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (7.13) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei (7.13) wieder mit der Multiplizität 2 auftritt. Es besteht die Äquivalenzbeziehung: (7.12) \sim (7.13). Man kann natürlich statt (7.12) und (7.13) den Ansatz nach (6.10) + (6.11) in symmetrisierter Form treffen.

§ 8. Der Sonderfall $s = 0$.

(Siehe auch [19]).

Es bleibt nun noch der zuerst ausgeschlossene Sonderfall spinloser Teilchen, $s = 0$, zu behandeln. Für $s = 0$ lauten die Wellengleichungen nach (6.1) + (5.6):

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) a^{(+0)} &= 0 \\ (\square - \kappa^2) a^{(-0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Nebenbedingungen der Form (5.6) treten nicht auf, weil die Reduktion $\mathfrak{D}_{0,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \rightarrow \mathfrak{U}_0 \oplus \mathfrak{U}_0$ durch $\mathfrak{L}_4 \rightarrow \mathfrak{D}_3$ induziert wird.

Um (8.1) durch ein System von Wellengleichungen zu ersetzen, in dem die Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4 höchstens in erster Ordnung auftreten, definieren wir:

$$\left. \begin{aligned} \partial_\nu^\mu a^{(+0)} &= i \kappa b^{(+0)\mu}_\nu \\ \partial_\nu^\mu a^{(-0)} &= i \kappa b^{(-0)\mu}_\nu \end{aligned} \right\} \quad (8.2) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

damit können wir (8.1) wie folgt ersetzen:

$$\left. \begin{aligned} \partial_\mu^\nu b^{(-0)\mu}_\nu &= -2 i \kappa a^{(+0)} \\ \partial_\mu^\nu b^{(-0)\mu}_\nu &= -2 i \kappa a^{(-0)} \end{aligned} \right\} \quad (8.3) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Umgekehrt erhält man durch Elimination der Spinoren $b^{(+0)\mu}_\nu$ und $b^{(-0)\mu}_\nu$ aus (8.2) + (8.3) wieder unsere Ausgangsgleichung (8.1). Es besteht daher die Äquivalenzbeziehung: (8.1) \sim (8.2) + (8.3).

§ 9. Darstellung der Wellenfelder ganzzahligen Spins durch Tensorfelder im $\mathfrak{R}(x_1, x_2, x_3, x_4)$

(Siehe [2] [5], [6], [17] bis [21], [31] bis [36], [37] bis [42], [48], [56] bis [61])

Im Falle ganzzahligen Spins s , also für $2s \equiv 0(2)$, sind die irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_{(s+Q)/2, (s-Q)/2}$, bzw. \mathfrak{U}_s eindeutige, irreduzible Darstellungen der \mathfrak{L}_4^+ bzw. der \mathfrak{D}_3 und damit sind $\mathfrak{D}_{(s+Q)/2, (s-Q)/2} \oplus \mathfrak{D}_{(s-Q)/2, (s+Q)/2}$, bzw. $\mathfrak{U}_s \oplus \mathfrak{U}_s$ eindeutige, irreduzible Darstellungen der \mathfrak{L}_4 , bzw. der \mathfrak{D}_3 . Es ist daher grundsätzlich möglich, diese Wellenfelder durch mehrkomponentige Feldfunktionen zu beschreiben, deren Komponenten sich wie Tensoren im $\mathfrak{R}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ transformieren. Allerdings ist im allgemeinen Fall die Beschreibung durch Tensorfelder viel schwerfälliger und unübersichtlicher als die durch Spinorfelder, weil bei Bedingungen, die die Irreduzibilität der zugrunde liegenden Darstellung der \mathfrak{L}_4 bzw. \mathfrak{D}_3 garantieren, wesentlich komplizierter für Tensorfelder als für Spinorfelder sind, wo die Forderung der Vollsymmetrie der Feldspinoren eine notwendige und hinreichende

Bedingung für die Irreduzibilität der zugehörigen Darstellung der \mathfrak{L}_4 bzw. der \mathfrak{D}_3 bildet.

Dem vollsymmetrischen Spinor $a^{(+Q)} \dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2 \dots \dot{\nu}_{s+Q}$, $Q = \pm s, \pm(s-1), \dots, \pm 1, \pm 0$, der sich nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{(s+Q)/2, (s-Q)/2}$ der \mathfrak{L}_4^+ transformiert, entspricht bezüglich der \mathfrak{L}_4^+ ein Tensor

$$A^{(+Q)} [n_1 n_2 \dots n_{s-|Q|}] [\langle k_1 l_1 \rangle \langle k_2 l_2 \rangle \dots \langle k_{|Q|} l_{|Q|} \rangle] \quad (9.1)$$

er ist bezüglich jedes Indexpaares (n_A, n_B) , (n_A, k_B) , (n_A, l_B) , (k_A, k_B) , (l_A, l_B) und (k_A, l_B) spurfrei; Symmetrie besteht gegen die Vertauschung zweier Indizes $[n_A, n_B]$ und gegen die Vertauschung zweier Indexpaare $[\langle k_A l_A \rangle, \langle k_B l_B \rangle]$; $\langle k_A l_A \rangle$ sind antisymmetrische und selbstduale Indexpaare, wobei die Selbstdualität durch die Beziehung

$$G_{\langle mn \rangle} = + \frac{1}{2} \delta_{\{mnuv\}} G_{\langle uv \rangle} \quad (9.2) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4^{23}$$

definiert ist.

Weil unsere Beschreibung gegen \mathfrak{L}_4 und nicht nur gegen \mathfrak{L}_4^+ invariant sein soll, müssen wir immer ein Paar von bezüglich der \mathfrak{L}_4^+ kovarianten Tensoren

$$\begin{aligned} A^{(+Q)} [n_1 n_2 \dots n_{s-|Q|}] [\langle k_1 l_1 \rangle \langle k_2 l_2 \rangle \dots \langle k_{|Q|} l_{|Q|} \rangle] \\ A^{(-Q)} [n_1 n_2 \dots n_{s-|Q|}] [\langle k_1 l_1 \rangle \langle k_2 l_2 \rangle \dots \langle k_{|Q|} l_{|Q|} \rangle] \end{aligned} \quad (9.3)$$

mit $Q = s, s-1, s-2, \dots, 1, 0$, entsprechend den beiden bezüglich \mathfrak{L}_4^+ kovarianten, vollsymmetrischen Spinoren $a^{(+Q)}$ und $a^{(-Q)}$ benutzen; dabei ist analog zur Spinorformulierung, Gl. (5.2)

$$S A^{(+Q)} = A^{(-Q)} \quad S A^{(-Q)} = A^{(+Q)} \quad (9.4)$$

Man kann nun das bezüglich \mathfrak{L}_4^+ kovariante Tensorpaar (9.3) bezüglich der räumlichen Spiegelung S und damit automatisch bezüglich der vollen LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 ausreduzieren:

$$\begin{aligned} B^{(+Q)} [n_X] [\{k_Y l_Y\}] &= A^{(+Q)} [n_X] [\langle k_Y l_Y \rangle] + A^{(-Q)} [n_X] [\langle k_Y l_Y \rangle] \\ B^{(-Q)} [n_X] [\{k_Y l_Y\}] &= A^{(+Q)} [n_X] [\langle k_Y l_Y \rangle] - A^{(-Q)} [n_X] [\langle k_Y l_Y \rangle] \end{aligned} \quad (9.5) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

dabei ist offensichtlich

$$S B^{(+Q)} = + B^{(+Q)}, \quad S B^{(-Q)} = - B^{(-Q)} \quad (9.6)$$

Es ist also $B^{(+Q)}$ bezüglich der \mathfrak{L}_4 ein echter Tensor, während $B^{(-Q)}$ bezüglich \mathfrak{L}_4 eine Tensordichte und damit einem Pseudotensor äqui-

valent ist. Die Selbstdualitätsrelation bezüglich des Indexpaares $\{k_Y l_Y\}$ wird durch (9.5) zerstört; es bestehen aber außer der offensichtlichen Antisymmetrie in $\{k_Y l_Y\}$, die durch (9.5) erhalten bleiben, um die Komponentenzahl weiter einzuschränken, noch weitere, verwickeltere Beziehungen, die notwendig sind, um die Irreduzibilität der vorliegenden Darstellung der \mathfrak{L}_4 zu gewährleisten; natürlich bleiben zudem alle Symmetrie- und Spurbeziehungen der Tensoren $A^{(\pm Q)}$ durch (9.5) auch für die Größen $B^{(\pm Q)}$ erhalten.

Die Nebenbedingungen (5.6) nehmen in der Tensorformulierung die Gestalt

$$\partial_{n_s - |Q|} A^{(\pm Q)}_{[n_1 n_2 \dots n_{s-|Q|}] [\langle k_1 l_1 \rangle \langle k_2 l_2 \rangle \dots \langle k_{|Q|} l_{|Q|} \rangle]} = 0 \quad (9.7) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

an, wobei in Übereinstimmung mit der analogen Beschränkung bei (5.6) $Q \neq s$ sein muß.

§ 10. Explizite Tensorformulierung der Fälle $s = 0$ und $s = 1$

(s. [2], [5], [6], [17] bis [21], [31] bis [36], [48], [56])

Es seien hier die Tensorformulierungen der Wellengleichungen für die beiden einfachsten, physikalisch aber interessanten Fälle $s = 0$ und $s = 1$ angegeben.

Für $s = 0$ beschreiben nach (8.1) die beiden spinoriellen, das heißt bezüglich \mathfrak{L}_4^+ skalaren Funktionen $a^{(+0)}$ und $a^{(-0)}$ das Wellenfeld; sie transformieren sich nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{0,0}$ der \mathfrak{L}_4^+ , Kovarianz bezüglich \mathfrak{L}_4 erzeugt die Relation $S a^{(+0)} = a^{(-0)}$, $S a^{(-0)} = a^{(+0)}$. Ausreduktion nach S und damit eo ipso nach \mathfrak{L}_4 liefert einen echten Skalar bezüglich der \mathfrak{L}_4 , nämlich

$$A = a^{(+0)} + a^{(-0)} \quad (10.1)$$

der sich offensichtlich nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{0,0}$ der \mathfrak{L}_4^+ transformiert, mit der Spiegelungstransformation

$$S A = + A \quad (10.2)$$

und eine skalare Dichte bezüglich der \mathfrak{L}_4 , nämlich

$$A' = a^{(+0)} - a^{(-0)} \quad (10.3)$$

die sich offensichtlich ebenfalls nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{0,0}$ der \mathfrak{L}_4^+ transformiert, aber mit der Spiegelungstransformation

$$S A' = - A' \quad (10.4)$$

Der skalaren Dichte A' ist ein total antisymmetrischer Tensor vierter Stufe, kurz Pseudoskalar genannt, äquivalent:

$$A_{\{klmn\}} = \Delta_{\{klmn\}} A' \quad (10.5)^{24}$$

Damit lauten die zu (8.1) äquivalenten Wellengleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) A &= 0 \\ (\square - \kappa^2) A_{\{klmn\}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.6) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Nach PAULI-WEISSKOPF und nach KEMMER kann man definieren:

$$\left. \begin{aligned} \partial_n A &= \kappa B_n \\ \partial_k A_{\{klmn\}} &= \kappa B_{\{lmn\}} \end{aligned} \right\} \quad (10.7) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

womit man statt (10.6) schreiben kann:

$$\left. \begin{aligned} \partial_n B_n &= \kappa A \\ \partial_k B_{\{lmn\}} - \partial_l B_{\{mnk\}} + \partial_m B_{\{nkl\}} - \partial_n B_{\{klm\}} &= \kappa A_{\{klmn\}} \end{aligned} \right\} \quad (10.8) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Es bestehen dabei die Äquivalenzbeziehungen: (10.6) \sim (10.7) + (10.8) \sim (8.2) + (8.3) \sim (8.1).

Die beiden bisher in der Literatur diskutierten Fälle des skalaren und des pseudoskalaren Teilchens erhält man aus unseren Ansätzen (8.1) \sim (8.2) + (8.3) \sim (10.6) \sim (10.7) + (10.8) als Sonderfälle.

Für das skalare Feld hat man als Zusatzbedingung

$$A_{\{klmn\}} = 0 \quad (10.9) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

zu setzen. Damit reduziert sich (10.6) zu

$$(\square - \kappa^2) A = 0 \quad (10.10) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

In (10.7) wird mit (10.9)

$$B_{\{lmn\}} = 0 \quad (10.11) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

und daher reduziert sich (10.7) + (10.8) auf die Gln.

$$\left. \begin{aligned} \partial_n A &= \kappa B_n \\ \partial_n B_n &= \kappa A \end{aligned} \right\} \quad (10.12) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

das sind die bekannten Gleichungen von PAULI-WEISSKOPF. In Spinorschreibweise lautet die Zusatzbedingung (10.9):

$$a^{(+0)} = a^{(-0)} = u^{(+)} = A \quad (10.13) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Damit reduziert sich (8.1) zu

$$(\square - \kappa^2) u^{(+)} = 0 \quad (10.14) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei offensichtlich die Identität (10.14) \equiv (10.10) besteht. Aus (8.2) + (8.3) erhält man mit der Zusatzbedingung (10.13):

$$\partial_\nu^\mu u^{(+)} = i \kappa v^{(+)\mu}_\nu \quad (10.15) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei aus (8.2) + (10.13) die Beziehung

$$b^{(+0)\mu}_\nu = b^{(-0)\mu}_\nu = v^{(+)\mu}_\nu \quad (10.16) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

folgt, und als weitere Gleichung

$$\partial_\mu^\nu v^{(+)\mu}_\nu = -2 i \kappa u^{(+)} \quad (10.17) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Offensichtlich sind folgende Gleichungssysteme äquivalent: (10.10) \equiv (10.14) \sim (10.12) \sim (10.15) + (10.17).

Analog läßt sich der pseudoskalare Sonderfall behandeln. Dieser ergibt sich durch die Zusatzbedingung

$$A = 0 \quad (10.18) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Damit reduziert sich (10.6) zu

$$(\square - \kappa^2) A_{\{klmn\}} = 0 \quad (10.19) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

In (10.7) wird mit (10.18)

$$B_n = 0 \quad (10.20) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

und damit reduziert sich (10.7) + (10.8) auf

$$\left. \begin{aligned} \partial_k A_{\{klmn\}} &= \kappa B_{\{lmn\}} \\ \partial_k B_{\{lmn\}} - \partial_l B_{\{mnk\}} + \partial_m B_{\{nkl\}} - \partial_n B_{\{klm\}} &= \kappa A_{\{klmn\}} \end{aligned} \right\} \quad (10.21) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

was mit den bekannten Gleichungen von KEMMER übereinstimmt. In Spinorschreibweise bedeutet (10.18)²⁴

$$a^{(+0)} = -a^{(-0)} = u^{(-)} = A_{\{klmn\}} A_{\{klmn\}} \quad (10.22) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Damit reduziert sich (8.1) zu

$$(\square - \kappa^2) u^{(-)} = 0 \quad (10.23) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

was mit (10.19) äquivalent ist. Aus (8.2) + (8.3) folgt mit (10.22):

$$b^{(+0)\dot{\mu}}_{\nu} = -b^{(-0)\dot{\mu}}_{\nu} = v^{(-)\dot{\mu}}_{\nu} \quad (10.24) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\nu}^{\dot{\mu}} u^{(-)} &= i \kappa v^{(-)\dot{\mu}}_{\nu} \\ \partial_{\dot{\mu}}^{\nu} v^{(-)\dot{\mu}}_{\nu} &= -2 i \kappa u^{(-)} \end{aligned} \right\} \quad (10.25) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Offensichtlich sind folgende Gleichungssysteme äquivalent: (10.19) \sim (10.21) \sim (10.23) \sim (10.25).

Für $s = 1$ können wir das Wellenfeld durch die beiden Spinoren $a^{(+0)\dot{\mu}}_{\nu}$ und $a^{(-0)\dot{\mu}}_{\nu}$ beschreiben; sie transformieren sich nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{1/2, 1/2}$ der \mathfrak{L}_4^+ , Kovarianz bezüglich \mathfrak{L}_4 erzeugt die Relation: $S a^{(+0)\dot{\mu}}_{\nu} = a^{(-0)\dot{\mu}}_{\mu}$, $S a^{(-0)\dot{\mu}}_{\nu} = a^{(+0)\dot{\mu}}_{\mu}$. Nach S und damit eo ipso nach \mathfrak{L}_4 ausreduziert sind unsere beiden Spinoren einem Vierervektor A_n und einem Pseudovektor $A_{\{klm\}}$ äquivalent. Damit folgen aus (7.3) die Wellengleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) A_n &= 0 \\ (\square - \kappa^2) A_{\{klm\}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.26) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

und dazu aus (7.4) die notwendigen Nebenbedingungen²³

$$\left. \begin{aligned} \partial_n A_n &= 0 \\ \partial_{\{klmn\}} \partial_k A_{\{lmn\}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.27) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Es besteht die Äquivalenz (7.3) + (7.4) \sim (10.26) + (10.27). Oder man geht von den Gln. (7.2) aus, wo den beiden symmetrischen Spinoren $a^{(+1)\dot{\mu}\kappa}$ und $a^{(-1)\nu\lambda}$ die beiden selbstdualen, antisymmetrischen Tensoren $G^{(+1)\langle kl \rangle}$ und $G^{(-1)\langle kl \rangle}$ äquivalent sind, wobei $S G^{(+1)} = G^{(-1)}$ und $S G^{(-1)} = G^{(+1)}$ ist. Damit lauten die zu (7.2) äquivalenten Wellengleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) G^{(+1)\langle kl \rangle} &= 0 \\ (\square - \kappa^2) G^{(-1)\langle kl \rangle} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.28) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Man kann nun statt $G^{(+1)}$ und $G^{(-1)}$ einen antisymmetrischen Tensor $F_{\{kl\}}$ — auch Sechservektor genannt — einführen durch

$$F_{\{kl\}} = G^{(+1)\langle kl \rangle} + G^{(-1)\langle kl \rangle} \quad (10.29) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

womit

$$G^{(+1)\langle kl \rangle} - G^{(-1)\langle kl \rangle} = \frac{1}{2} \delta_{\{klmn\}} F_{\{mn\}} \quad (10.30) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wird und im wesentlichen denselben Sechservektor $F_{\{kl\}}$ darstellt. Damit erhält man die mit (10.28) \sim (7.2) äquivalenten Wellengleichungen

$$(\square - \kappa^2) F_{\{kl\}} = 0 \quad (10.31) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

An Stelle von (10.26) + (10.27) \sim (10.28) kann man aber folgendes, auch mit (7.11) äquivalentes Gleichungssystem setzen:

$$\left. \begin{aligned} \kappa F_{\{kl\}} &= (\partial_k A_l - \partial_l A_k) + \partial_u A_{\{ukl\}} \\ \partial_k F_{\{kl\}} &= \kappa A_l \\ \partial_k F_{\{mn\}} + \partial_m F_{\{nk\}} + \partial_n F_{\{km\}} &= \kappa A_{\{k\}mn} \end{aligned} \right\} \quad (10.32) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Zusammenfassend haben wir folgende Äquivalenzbeziehungen: (7.2) \sim \sim (7.3) + (7.4) \sim (7.11) \sim (10.26) + (10.27) \sim (10.28) \sim (10.31) \sim (10.32).

Die bisher in der Literatur behandelten Fälle von Teilchen mit Spin $s = 1$, nämlich das Vektorteilchen und das Pseudovektorteilchen, erhält man aus unseren Ansätzen als Sonderfälle, wenn man durch Zusatzbedingungen über das Transformationsverhalten der Wellenfunktionen gegen die räumliche Spiegelung S verfügt.

Um die Vektortheorie zu erhalten, muß man als Zusatzbedingung

$$A_{\{klm\}} = 0 \quad (10.33) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

einführen. Man erhält damit aus (10.32) die Wellengleichungen

$$\left. \begin{aligned} \kappa F_{\{kl\}} &= \partial_k A_l - \partial_l A_k \\ \partial_k F_{\{kl\}} &= \kappa A_l \end{aligned} \right\} \quad (10.34) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei die weitere Gleichung

$$\partial_k F_{\{mn\}} + \partial_m F_{\{nk\}} + \partial_n F_{\{km\}} \equiv \pm \frac{1}{2} \delta_{\{klmn\}} \partial_k F_{\{mn\}} \equiv 0 \quad (10.35) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

als Identität zwangsläufig als Folge von (10.34) erfüllt ist.

Ebenso erhält man mit der Zusatzbedingung

$$A_n = 0 \quad (10.36) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

aus (10.32) die Wellengleichungen der Pseudovektortheorie:

$$\left. \begin{aligned} \kappa F_{\{kl\}} &= \partial_u A_{\{ukl\}} \\ \partial_k F_{\{mn\}} + \partial_m F_{\{nk\}} + \partial_n F_{\{km\}} &= \kappa A_{\{k\}mn} \end{aligned} \right\} \quad (10.37) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

dabei ist

$$\partial_k F_{\{kl\}} \equiv 0 \quad (10.38) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

als notwendige Folge von (10.37) identisch erfüllt.

Man kann aber für das Vektorteilchen an Stelle von (10.34) das damit äquivalente System (10.31) + (10.35) setzen; ebenso ist der Ansatz (10.37) für das Pseudovektorteilchen mit dem System (10.31) + (10.38) äquivalent.

Mit den Gl. (10.34) \sim (10.31) + (10.35) ist auch noch folgender Ansatz für das Vektorteilchen äquivalent:

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) A_{n\dot{\nu}} &= 0 \\ \partial_n A_{\dot{\nu}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.39) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

(10.39) folgt unmittelbar aus (10.26) + (10.27) mit der Zusatzbedingung (10.33)²⁵.

Analog ist mit den Gl. (10.37) \sim (10.31) + (10.38) folgender Ansatz für das Pseudovektorteilchen äquivalent:

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) A_{\{klm\}} &= 0 \\ \delta_{\{klmn\}} \partial_n A_{\{klm\}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.40) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

(10.40) folgt unmittelbar aus (10.26) + (10.27) mit der Zusatzbedingung (10.36)²⁶.

Man kann die Sonderfälle des vektoriellen und des pseudovektoriellen Teilchens auch durch Spinorgleichungen beschreiben. In Spinorschreibweise lautet die Zusatzbedingung für das Vektorteilchen, Gl. (10.33):

$$a^{(+0)\dot{\mu}}_{\nu} = a^{(-0)\dot{\mu}}_{\nu} = u^{(+)\dot{\mu}}_{\nu} \quad (10.41) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

damit erhält man aus (7.3) + (7.4) die (10.39) entsprechende Gleichung

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) u^{(+)\dot{\mu}}_{\nu} &= 0 \\ \partial_{\dot{\mu}}^{\nu} u^{(+)\dot{\mu}}_{\nu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.42) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Weiters erhält man mit (10.41) aus (7.9) die (10.34) entsprechenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\dot{\mu}\nu} a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}} + \partial^{\dot{\lambda}\tau} a^{(-1)}_{\nu\tau} &= 2 i \kappa u^{(+)\dot{\lambda}}_{\nu} \\ \partial^{\dot{\mu}\nu} u^{(+)\dot{\lambda}}_{\nu} &= i \kappa a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}} \\ \partial_{\dot{\mu}\tau} u^{(+)\dot{\mu}}_{\nu} &= i \kappa a^{(-1)}_{\nu\tau} \end{aligned} \right\} \quad (10.43) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei $a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}}$ und $a^{(-1)}_{\nu\tau}$ symmetrische Spinoren sind. Oder man schreibt nach (7.11) mit der Zusatzbedingung (10.41) in symmetrisierter Form:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\dot{\mu}\nu} a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}} + \partial^{\dot{\lambda}\tau} a^{(-1)}_{\nu\tau} &= 2 i \kappa u^{(+)\dot{\lambda}}_{\nu} \\ \partial^{\dot{\mu}\nu} u^{(+)\dot{\lambda}}_{\nu} + \partial^{\dot{\lambda}\nu} u^{(+)\dot{\mu}}_{\nu} &= 2 i \kappa a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}} \\ \partial_{\dot{\mu}\tau} u^{(+)\dot{\mu}}_{\nu} + \partial_{\dot{\mu}\tau} u^{(+)\dot{\mu}}_{\tau} &= 2 i \kappa a^{(-1)}_{\nu\tau} \end{aligned} \right\} \quad (10.44) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Die überzählige Gleichung, die gerade der Gl. (10.35) entspricht,

$$\partial_{\dot{\mu}\nu} a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}} - \partial^{\dot{\lambda}\tau} a^{(-1)}_{\nu\tau} = 0 \quad (10.45) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

ist als notwendige Folge von (10.43) + (7.10) \sim (10.44) identisch erfüllt. Weiters folgt notwendig aus (10.43) + (7.10) \sim (10.44) die Nebenbedingung

$$\partial_{\dot{\mu}}^{\nu} u^{(+)\dot{\mu}}_{\nu} = 0 \quad (10.46) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

aus dem Gleichungssystem (10.42). Analog zur Tensorformulierung kann man das Vektorteilchen in äquivalenter Weise auch durch das Gleichungssystem (7.2) + (10.45) beschreiben.

Zusammenfassend sind für das Vektorteilchen folgende äquivalente Ansätze möglich: (10.34) \sim (10.31) + (10.35) \sim (10.39) \sim (10.42) + (10.41) \sim (10.43) + (7.10) \sim (10.44) \sim (7.2) + (10.45).

Der Fall des Pseudovektorteilchens läßt sich ebenfalls durch Spinorgleichungen beschreiben. Die Zusatzbedingung (10.36) lautet in Spinorform:

$$a^{(+0)\dot{\mu}}_{\nu} = -a^{(-0)\dot{\mu}}_{\nu} = u^{(-)\dot{\mu}}_{\nu} \quad (10.47) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Damit erhält man aus (7.3) + (7.4) die (10.40) entsprechenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) u^{(-)\dot{\mu}}_{\nu} &= 0 \\ \partial^{\nu}_{\dot{\mu}} u^{(-)\dot{\mu}}_{\nu} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.48) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Aus (7.9) erhält man mit (10.47) die (10.21) entsprechenden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\dot{\mu}\nu} a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}} - \partial^{\dot{\lambda}\tau} a^{(-1)}_{\nu\tau} &= 2 i \kappa u^{(-)\dot{\lambda}}_{\nu} \\ \partial^{\dot{\mu}\nu} u^{(-)\dot{\lambda}}_{\nu} &= i \kappa a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}} \\ \partial_{\dot{\mu}\tau} u^{(-)\dot{\mu}}_{\nu} &= i \kappa a^{(-1)}_{\nu\tau} \end{aligned} \right\} \quad (10.49) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei $a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}}$ und $a^{(-1)}_{\nu\tau}$ symmetrische Spinoren sind. Oder man schreibt nach (7.11) mit der Zusatzbedingung (10.47) in symmetrisierter Form:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\dot{\mu}\nu} a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}} - \partial^{\dot{\lambda}\tau} a^{(-1)}_{\nu\tau} &= 2 i \kappa u^{(-)\dot{\lambda}}_{\nu} \\ \partial^{\dot{\mu}\nu} u^{(-)\dot{\lambda}}_{\nu} + \partial^{\dot{\lambda}\nu} u^{(-)\dot{\mu}}_{\nu} &= 2 i \kappa a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}} \\ \partial_{\dot{\mu}\tau} u^{(-)\dot{\mu}}_{\nu} + \partial_{\dot{\mu}\nu} u^{(-)\dot{\mu}}_{\tau} &= 2 i \kappa a^{(-1)}_{\nu\tau} \end{aligned} \right\} \quad (10.50) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Die überzählige Gleichung

$$\partial_{\dot{\mu}\nu} a^{(+1)\dot{\lambda}\dot{\mu}} + \partial^{\dot{\lambda}\tau} a^{(-1)}_{\nu\tau} = 0 \quad (10.51) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

entspricht gerade der Gleichung (10.38) und ist als notwendige Folge von (10.49) + (7.10) \sim (10.50) identisch erfüllt. Weiters folgt notwendig aus (10.49) + (7.10) \sim (10.50) die Nebenbedingung aus dem Gleichungssystem (10.48):

$$\partial^{\nu}_{\dot{\mu}} u^{(-)\dot{\mu}}_{\nu} = 0 \quad (10.52) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Analog zur Tensorformulierung kann man das Pseudovektorteilchen in äquivalenter Weise auch durch das Gleichungssystem (7.2) + (10.51) beschreiben.

Zusammenfassend sind für das Pseudovektorteilchen folgende äquivalente Ansätze möglich: (10.37) \sim (10.31) + (10.38) \sim (10.40) \sim (10.48) + (10.47) \sim (10.49) + (7.10) \sim (10.50) \sim (7.2) + (10.51).

§ 11. Der Ansatz von Dirac und die Theorie von Pauli und Fierz

(s. [1] bis [7])

DIRAC hat im Jahre 1936 den Versuch unternommen, Wellengleichungen für kräftefreie Teilchen beliebigen Spins zu formulieren. Dabei erhält er durch Betrachtung der Vertauschungsrelationen für den Spinoperator im relativistischen Fall — dieser hat als Sechservektor

$S_{jk} = -S_{kj}$ neben den Komponenten $S_x = S_{23}$, $S_y = S_{31}$, $S_z = S_{12}$ noch die Komponenten $S_x' = S_{14}$, $S_y' = S_{24}$, $S_z' = S_{34}$ — und deren Zusammenhang mit den möglichen irreduziblen Darstellungen der \mathfrak{L}_4^+ im wesentlichen unsere Gln. (6.2) + (6.3). Allerdings ist bei DIRAC die Invarianz der Theorie gegen die volle LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 nicht gewährleistet, sondern nur die Invarianz gegen die eigentliche LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4^+ , denn DIRAC setzt entweder nur die Wellengleichungen für die beiden vollsymmetrischen Spinoren $a^{(+Q)}$ und $a^{+(Q-1)}$ oder aber nur für die beiden vollsymmetrischen Spinoren $a^{(-Q)}$ und $a^{-(Q-1)}$ an; nach DIRACS Verfahren zerfällt also unser gegen \mathfrak{L}_4 invariantes System (6.2) + (6.3) in zwei unabhängige, im allgemeinen nur mehr gegen \mathfrak{L}_4^+ invariante Gleichungssysteme; Invarianz gegen die \mathfrak{L}_4 tritt — mehr nolens volens denn beabsichtigt — nur im Fall des Systems mit den vollsymmetrischen Spinoren $a^{(+1/2)}$ und $a^{(-1/2)}$ auf, also überhaupt nur bei halbzahligem s , $2s = 1(2)$. Formelmäßig lassen sich die Gleichungen DIRACS wie folgt anschreiben:

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{\mu}_{s+Q} \nu_{s-Q+1}} a^{(+Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q} &= i \kappa a^{+(Q-1)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q-1} \\ &\quad \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q} \quad \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q+1} \\ \partial_{\dot{\mu}_{s+Q} \nu_{s-Q+1}} a^{+(Q-1)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-Q-1} &= i \kappa a^{(+Q)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+Q} \\ &\quad \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q+1} \quad \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q} \end{aligned} \quad (11.1) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4^+$$

wobei der Parameter $Q = +s, +s-1, \dots, -s+2, -s+1$ durchlaufen kann. Darüber hinaus hat man bei der DIRACSchen Arbeit, wie schon FIERZ ausführt, den Eindruck, als ob die angesetzten Systeme von Wellengleichungen für voneinander verschiedene Werte des Parameters Q inäquivalent wären, also das Spinverhalten im relativistisch invarianten Fall durch zwei Quantenparameter, nämlich s und Q , bestimmt sei; sowohl nach den Untersuchungen von FIERZ als auch nach unseren Betrachtungen in § 6 besteht eine Abhängigkeit der physikalischen Ergebnisse im Falle kräftefreier Teilchen vom Quantenparameter Q nicht, weil alle möglichen Ansätze (6.2) + (6.3), die sich durch den Parameter Q unterscheiden, im kräftefreien Fall unabhängig von Q äquivalent sind. Der einzige Quantenparameter, der in die Endergebnisse der Theorie eingeht, ist die Spinquantenzahl s . Dieses Ergebnis bleibt auch erhalten, wenn man die Invarianz gegen \mathfrak{L}_4 zerstört und nur mehr die Invarianz gegen \mathfrak{L}_4^+ wahrt.

Die FIERZsche Behandlung geht von der Tatsache aus, daß alle von DIRAC angesetzten Wellengleichungen für den Spin s im kräftefreien Fall äquivalent sind, unabhängig vom Parameter Q . FIERZ trifft nun unter den möglichen Ansätzen zum Spin s eine Auswahl, derart, daß er im Falle halbzahligen Spins s , $2s \equiv 1(2)$, die zu den irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_{(s+1/2)/2, (s-1/2)/2}$ und $\mathfrak{D}_{(s-1/2)/2, (s+1/2)/2}$ der \mathfrak{L}_4^+ gehörigen, vollsymmetrischen Spinoren $a^{(+1/2)}$ und $a^{(-1/2)}$ verwendet; man erreicht dies, wenn man als Wellengleichungen den DIRACSchen Ansatz (11.1) verwendet und für den Parameter $Q = 1/2$ einsetzt. Durch diese

spezielle Auswahl unter den möglichen Wellengleichungen vom Typ (11.1) erreicht man Invarianz gegen die volle LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 .

Bei der Behandlung der Felder zu ganzzahligem Spin s , $2s = 0(2)$, umgeht FIERZ überhaupt die Verwendung von Spinoren mit der Begründung, der Spinorkalkül sei einer Tensorformulierung gegenüber viel schwerfälliger; nach Ansicht des Verfassers ist hingegen im allgemeinen Fall gerade die spinorielle Schreibweise zweckmäßiger und eleganter (vgl. § 8). FIERZ unterscheidet damit schon in der klassisch-feldtheoretischen Behandlung der Spinwellenfelder grundsätzlich zwischen Feldern zu halbzahligem oder zu ganzzahligem Spin; solange man die Spinwellenfelder nur klassisch behandelt, ist aber die grundsätzliche Unterscheidung dieser beiden Fälle, im Ansatz der Wellengleichungen bereits vorgenommen, nicht notwendig, ja nach Ansicht des Verfassers sogar unzuweckmäßig und umständlich. Der prinzipielle Unterschied zwischen halb- und ganzzahligem Spin tritt erst bei der Quantisierung durch die Verwendung der FERMI-DIRAC-Statistik für $2s \equiv 1(2)$ einerseits, hingegen der BOSE-EINSTEIN-Statistik für $2s \equiv 0(2)$ andererseits auf.

Im Falle kräftefreier Teilchen mit ganzzahligem Spin $s > 0$, $2s = 0(2)$, setzt FIERZ folgende Wellengleichungen an:

$$\begin{aligned} \partial_{u_0}^F \{u_0 u_1\} [u_2 u_3 \dots u_s] &= \kappa A [u_1 u_2 \dots u_s] \\ \partial_{u_0} A [u_1 u_2 \dots u_s] - \partial_{u_1} A [u_0 u_2 \dots u_s] &= \kappa^F \{u_0 u_1\} [u_2 u_3 \dots u_s] \end{aligned} \quad (11.2) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Dabei ist der Tensor $A [u_1 u_2 \dots u_s]$ in allen Indexpaaren $[u_X, u_Y]$ symmetrisch und spurfrei. Er gehört zur irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{s/2, s/2}$ der \mathfrak{L}_4^+ und spannt einen gegen die \mathfrak{L}_4 invarianten Teilraum $\mathfrak{R}_{(s+1) (s+1)}^{(+)}$ des Darstellungsraumes $\mathfrak{R}_{(s+1) (s+1)}'' \oplus \mathfrak{R}_{(s+1) (s+1)}^{(+)} = \mathfrak{R}_{(s+1) (s+1)}^{(+)} \oplus \mathfrak{R}_{(s+1) (s+1)}^{(-)}$ zur irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{s/2, s/2} \oplus \mathfrak{D}_{s/2, s/2}$ der \mathfrak{L}_4 auf. In Spinorformulierung entspricht dies dem Ansatz:

$$+ a \begin{pmatrix} +0 \\ v_1 v_2 \dots v_s \end{pmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s = + a \begin{pmatrix} -0 \\ v_1 v_2 \dots v_s \end{pmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s = u \begin{pmatrix} + \\ v_1 v_2 \dots v_s \end{pmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s \quad (11.3) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Die andere Möglichkeit

$$+ a \begin{pmatrix} +0 \\ v_1 v_2 \dots v_s \end{pmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s = - a \begin{pmatrix} -0 \\ v_1 v_2 \dots v_s \end{pmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s = u \begin{pmatrix} - \\ v_1 v_2 \dots v_s \end{pmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s \quad (11.4) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

die zu dem ebenfalls gegen \mathfrak{L}_4 invarianten Teilraum $\mathfrak{R}_{(s+1) (s+1)}^{(-)}$ gehört, wird im Ansatz von FIERZ nicht behandelt; solange man nur kräftefreie Teilchen betrachtet, bringt die Unterscheidung dieser beiden Fälle keine wesentlich verschiedenen Ergebnisse, setzt man aber Wechselwirkungen in Rechnung, dann treten prinzipielle Unterschiede zwischen den beiden Möglichkeiten, den Ansatz zu treffen, auf (vgl. etwa den Unterschied zwischen Vektor- und Pseudovektorteilchen bei KEMMER).

Der Tensor $F \{u_0 u_1\} [u_2 u_3 \dots u_s]$ ist in allen Indexpaaren $[u_X, u_Y]$, $X \in \{2, 3, \dots, s\}$, $Y \in \{2, 3, \dots, s\}$ symmetrisch und spurfrei, in $\{u_0, u_1\}$ antisymmetrisch und in (u_0, u_X) und (u_1, u_X) , $X \in \{2, 3, \dots, s\}$ spurfrei. Diese Eigenschaften sind durch die Wellengleichungen (11.2) und die Symmetrie- und Spurbedingungen des Tensors $A [u_1 u_2 \dots u_s]$ zwingend festgelegt. Daher gehört er zum Darstellungsraum $\mathfrak{R}_{(s+2)s} \oplus \mathfrak{R}_{s(s+2)}$ der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{(s+1)/2, (s-1)/2} \oplus \mathfrak{D}_{(s-1)/2, (s+1)/2}$ der \mathfrak{L}_4 . An Nebenbedingungen erhält man aus (11.2):

$$\partial_{u_1} A [u_1 u_2 \dots u_s] = 0 \quad (11.5) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

was mit (5.6) für $Q = \pm 0$ unter Beachtung der Zusatzbedingung (11.3) äquivalent ist und sich als

$$\partial_{\dot{\mu}_s} u^{(+)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s}{v_1 v_2 \dots v_s} = 0 \quad (11.6) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

in Spinorschreibweise formulieren läßt. Als Zusatzbedingung für F folgt

$$\begin{aligned} \partial_k F \{lm\} [u_2 u_3 \dots u_s] + \partial_l F \{mk\} [u_2 u_3 \dots u_s] + \\ + \partial_m F \{kl\} [u_2 u_3 \dots u_s] = 0 \end{aligned} \quad (11.7) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

(11.7) ist nichts anderes als ein Ausdruck für die Zusatzbedingung (11.3), die bewirkt, daß der Pseudovektor, der (11.4) entspricht, identisch verschwindet. Durch (11.7) kommt zum Ausdruck, daß der Tensor F als „Rotation“ des Tensors A darstellbar ist, wie es die Wellengleichungen (11.2) vorschreiben. Der FIERZsche Ansatz (11.2) ist mit unseren Wellengleichungen (6.2) + (6.5) für den Wert $Q = 0$ unter der Bedingung äquivalent, daß man zu den Wellengleichungen (6.2) + (6.5) noch die Zusatzbedingung (11.3) hinzufügt.

In Spinorform umgeschrieben lauten die FIERZschen Wellengleichungen (11.2) nach (6.2) + (6.5) unter Verwendung der Zusatzbedingung (11.3) für vollsymmetrische Spinoren:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\dot{\mu}_{s+1} v_s} a^{(+1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+1}}{v_1 v_2 \dots v_{s-1}} + \partial_{\dot{\mu}_s v_{s+1}} a^{(-1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-1}}{v_1 v_2 \dots v_{s+1}} &= \\ &= 2 i \kappa u^{(+)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s}{v_1 v_2 \dots v_s} \\ \partial_{\dot{\mu}_s v_{s+1}} u^{(+)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s}{v_1 v_2 \dots v_s} &= i \kappa a^{(-1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-1}}{v_1 v_2 \dots v_{s+1}} \\ \partial_{\dot{\mu}_{s+1} v_s} u^{(+)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_s}{v_1 v_2 \dots v_s} &= i \kappa a^{(+1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+1}}{v_1 v_2 \dots v_{s-1}} \end{aligned} \right\} \quad (11.8) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

die weitere Gleichung

$$\partial_{\dot{\mu}_{s+1} v_s} a^{(+1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s+1}}{v_1 v_2 \dots v_{s-1}} - \partial_{\dot{\mu}_s v_{s+1}} a^{(-1)} \frac{\dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{s-1}}{v_1 v_2 \dots v_{s+1}} = 0 \quad (11.9) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

ist eine andere Ausdrucksweise für die Zusatzbedingung (11.3) und als Folge von (11.8) identisch erfüllt; es ist (11.9) \sim (11.7).

Für den einfachsten Fall $s = 1$ geht der Ansatz (11.2) \sim (11.8) in die bekannten PROCA-Gleichungen des Vektorteilchens (10.34) \sim (10.43) über; die Zusatzbedingung (11.3) geht in (10.41), (11.7) \sim (11.9) in (10.38) \sim (10.45), (11.5) \sim (11.6) in $(\partial_n A_n = 0) \sim (\partial_\mu^\nu u^{(+)\mu}_\nu = 0)$ über. Die bei FIERZ nicht diskutierte Zusatzbedingung (11.4) führt für $s = 1$ auf (10.47), die Zusatzbedingung für den pseudovektoriellen Fall.

Herrn Professor Dr. H. HÖNL, Freiburg (Breisgau), danke ich herzlichst für sein reges, förderndes Interesse und für wertvolle, anregende Diskussionen; weiterhin möchte ich Herrn Doz. Dr. H. SALECKER, Stuttgart, für wertvolle und interessante Diskussionen herzlichst danken.

Weiterer Dank gebührt dem Kultministerium des Landes Baden-Württemberg in Stuttgart, das durch finanzielle Hilfe die Durchführung vorliegender Arbeit ermöglichte.

Literatur

1. DIRAC, P. A. M., Proc. Roy. Soc. London **A 155**, 447 (1936).
2. FIERZ, M., Helv. Phys. Acta **12**, 3 (1939).
3. PAULI, W. und M. FIERZ, Helv. Phys. Acta **12**, 297 (1939).
4. FIERZ, M. und W. PAULI, Proc. Roy. Soc. London **A 173**, 211 (1939).
5. URBAN, P. und F. SCHWARZL, Acta Phys. Austr. **4**, 380 (1951).
6. DONNERT, H., Acta Phys. Austr. **7**, 181 (1953).
7. CAP, F., Z. Naturforsch. **8a**, 740 (1953).
8. DONNERT, H., Z. Naturforsch. **8a**, 745 (1953).
9. DONNERT, H., Z. Physik **137**, 649 (1954); dort weitere Literatur.
10. BROGLIE, L. DE, Théorie générale des Particules à Spin, (Méthode de Fusion) Paris 1943.
11. BROGLIE, L. DE, Comptes rend. **209**, 265 (1939).
12. KRAMERS, H. A., F. J. BELINFANTE und J. K. LUBÁNSKI, Physica **8**, 597 (1941); dort weitere Literatur.
13. LUBÁNSKI, J. K., Physica **9**, 310 (1942); dort weitere Literatur.
14. LUBÁNSKI, J. K. und L. ROSENFELD, Physica **9**, 117 (1942).
15. Hönl, H. und H. BOERNER, Z. Naturforsch. **5a**, 353 (1950); dort weitere Literatur.
16. BAUER, F. L., Sitzungsber. Bayr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl. 1952, S. 111; dort weitere Literatur.
17. PROCA, A., Journ. Physique et le Radium **7**, 347 (1936).
18. PROCA, A., Journ. Physique et le Radium **9**, 61 (1938).
19. KEMMER, N., Proc. Roy. Soc. London **A 166**, 127 (1938).
20. KEMMER, N., Proc. Roy. Soc. London **A 173**, 91 (1940); dort weitere Literatur.
21. DONNERT, H., Z. Physik **136**, 331 (1953); dort weitere Literatur.
- 22a. BELINFANTE, F. J., Physica **6**, 849 (1939).
- 22b. BELINFANTE, F. J., Physica **6**, 887 (1939).
23. BHABHA, H., Rev. Mod. Phys. **8**, 597 (1941).
24. BHABHA, H., Rev. Mod. Phys. **17**, 200 (1945).
25. BHABHA, H., Proc. Indian Acad. Sci. **21**, 265 (1945).

26. BHABHA, H., *Rev. Mod. Phys.* **21**, 451 (1949).
27. BOPP, F. und F. L. BAUER, *Z. Naturforsch.* **4a**, 611 (1949).
28. BAUER, F. L., *Z. Naturforsch.* **4a**, 720 (1949).
29. MADHAVA RAO, B. S., *Proc. Indian Acad. Sci* **15**, 139 (1942).
30. MADHAVA RAO, B. S., V. R. THIRUVENKATACHAR und K. VENKATACHALIENGAR, *Proc. Roy. Soc. London A* **187**, 385 (1946).
31. YUKAWA, H., *Proc. Physico-Math. Soc. Japan* **17**, 48 (1935).
32. YUKAWA, H. und S. SAKATA, *Proc. Physico-Math. Soc. Japan* **19**, 1084 (1937).
33. YUKAWA, H., S. SAKATA und M. TAKETANI, *Proc. Physico-Math. Soc. Japan* **20**, 319 (1938).
- 34a. SAKATA, S. und M. TAKETANI, *Proc. Physico-Math. Soc. Japan* **22**, 757 (1940).
- 34b. SAKATA, S. und M. TAKETANI, *Inst. Phys.-Chem. Res. Tokyo* **38**, 1 (1940).
35. WENTZEL, G., *Quantentheorie der Wellenfelder*, Wien 1943; dort weitere Literatur.
36. MARCH, A., *Quantum Mechanics of Particles and Wave Fields*, London-New York 1951; dort weitere Literatur.
- 37a. WAERDEN, B. L. VAN DER, *Göttinger Nachr.* **1929**, 100 (1929).
- 37b. WAERDEN, B. L. VAN DER, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*, Berlin 1932.
38. WEYL, H., *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Leipzig 1928.
39. WIGNER, E. P., *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, Braunschweig 1931.
40. BOERNER, H., *Darstellungen von Gruppen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
41. WIGNER, E. P., *Ann. of Math.* **40**, 149 (1939).
42. LAPORTE, O. und G. UHLENBECK, *Phys. Rev.* **37**, 1380 (1931).
43. UMEZAWA, H., *Quantum Field Theory*, Amsterdam 1956.
44. CAP, F., *Fortschritte der Physik* **2**, 207 (1955).
45. CARTAN, E., *Leçons sur la Théorie des Spineurs I, II*, Paris 1938.
46. DIRAC, P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford 1947.
47. LUDWIG, G., *Die Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
48. HUND, F., *Materie als Feld*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
49. SALECKER, H., *Seminar über Quantenfeldtheorien*, Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg (Brg.), Sommersemester 1955, bearbeitet von T. ANDERS; unveröffentlicht.
50. SOMMERFELD, A., *Atombau und Spektrallinien II*, Braunschweig 1951; dort weitere Literatur.
51. KLEIN, O., *Z. Physik* **37**, 895 (1926).
52. SCHRÖDINGER, E., *Ann. d. Phys.* **81**, 109 (1926).
53. GORDON, W., *Z. Physik* **40**, 117 (1926).
54. DÖRING, W., *Einführung in die Quantenmechanik*, Göttingen 1955.
55. BLOCHINZEW, D., *Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin 1953.
- 56a. PAULI, W. und V. WEISSKOPF, *Helv. Phys. Acta* **7**, 709 (1934).
- 56b. WEISSKOPF, V., *Z. Physik* **89**, 27 (1934).
- 56c. WEISSKOPF, V., *Z. Physik* **90**, 817 (1934).
- 57a. SCHOUTEN, J. A., *Der Ricci-Kalkül*, Berlin 1924.
- 57b. SCHOUTEN, J. A., *Tensor Analysis for Physicists*, Oxford 1954.
58. SCHRÖDINGER, E., *Space-Time-Structure*, Cambridge 1950.
59. WEYL, H., *Raum-Zeit-Materie*, Berlin 1923.
60. LAUE, M. VON, *Die Relativitätstheorie I*, Braunschweig 1952.
61. DUSCHEK, A. und A. HOCHRAINER, *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung*, Wien 1948 bis 1950.

62. PAULI, W., Handbuch der Physik XXIV/1, Berlin 1933.
63. PAULI, W., Rev. Mod. Phys. **13**, 203 (1941).
64. SCHRÖDINGER, E., Proc. Roy. Soc. London. **229**, 39 (1955) und **232**, 435 (1955).
65. LAPORTE, O., Phys. Rev. **54**, 905 (1938).
66. MASSEY, H. S. W. und H. C. CORBEN, Proc. Cambridge Philos. Soc. **35**, 463 (1939).
67. GUNN, J., Proc. Roy. Soc. London **A 193**, 559 (1948).
68. MOTT, N. F. und H. S. W. MASSEY, The Theory of Atomic Collisions, Oxford 1950.
69. CORBEN, H. C. und J. SCHWINGER, Phys. Rev. **58**, 953 (1940).
70. SAUTER, F., Ann. Physik **18**, 61 (1933).
71. SAUTER, F., Z. Physik **86**, 818 (1933).
72. MOTT, N. F., Proc. Roy. Soc. London **A 124**, 425 (1929).

Anmerkungen

¹ Halbganze Zahlen sind $N/2$, wo $N = 0, 1, 2, \dots$

² Siehe Literatur unter [1] bis [36] und [63], [64].

³ Als punktförmig soll das Teilchen schematisiert sein, solange wir es im Sinne einer rein klassischen Feldtheorie behandeln und auch noch nach deren Quantisierung; die „Verschmierung“ des Teilchens in der durch Renormierung erweiterten quantisierten Theorie wird davon nicht betroffen, wenn wir von „punktförmigen“ Teilchen sprechen.

⁴ Siehe das Protokoll eines von H. SALECKER, Stuttgart, am Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg (Breisgau) veranstalteten Seminars über Quantenfeldtheorien [49].

⁵ Wir benützen als Koordinaten im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum $x_n - (x_1, x_2, x_3, x_4 = ict)$; als Abkürzungssymbol steht $\partial_n = \partial/\partial x_n$; ferner ist $\kappa = mc/\hbar$ eine reelle Konstante, und zwar offensichtlich der Reziprokwert der COMPTON-Wellenlänge unseres Teilchens, das unserem Wellenfeld entspricht und die Ruhmasse m besitzt.

⁶ Nach der Quantenmechanik besteht bekanntlich die Operatorzuordnung zu den klassischen Größen in der SCHRÖDINGER-Darstellung (s. z. B. [36], [38], [46], [47], [50], [62]): $\mathbf{p} \rightarrow i\hbar \text{ grad}$, $E \rightarrow -i\hbar \partial/\partial t$; setzt man dies in die Beziehung (1.2) für die klassischen Größen ein, dann folgt als quantenmechanische Formulierung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung die Gl. (1.1).

⁷ Eigentliche LORENTZ-Transformationen sind alle die LORENTZ-Transformationen, deren Koeffizientendeterminante den Wert $+1$ besitzt.

⁸ Eine lineare Transformation heißt unimodular, wenn die Koeffizientendeterminante der darstellenden Matrix T , $|T| = \pm 1$ ist.

⁹ \mathfrak{L}_4^+ ist isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{c}_2/\mathfrak{h}$, wobei der Normalteiler \mathfrak{h} der \mathfrak{c}_2 aus den beiden Elementen $+e$ und $-e$ besteht, wenn e das Einselement der \mathfrak{c}_2 bezeichnet; daher ist nach dem Homomorphiesatz der Gruppentheorie \mathfrak{L}_4^+ zweideutig homomorph der \mathfrak{c}_2 .

¹⁰ Nach dem Invariantentheoretischen Satz von GRAM kann man jedes invariante Gleichungssystem bezüglich einer Transformationsgruppe durch Nullsetzen von Kovarianten formulieren; bezüglich der \mathfrak{L}_4^+ und \mathfrak{c}_2 sind Spinoren Kovarianten und es werden auch alle Kovarianten durch Spinoren erfaßt.

¹¹ \mathfrak{D}_3 ist isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{u}_2/\mathfrak{h}$, wobei der Normalteiler \mathfrak{h} von \mathfrak{u}_2 wiederum aus den Elementen $+e$ und $-e$ besteht, wenn e das Einselement der \mathfrak{u}_2 bezeichnet; daher ist nach dem Homomorphiesatz der Gruppentheorie \mathfrak{D}_3 zweideutig homomorph der \mathfrak{u}_2 .

¹² Die Produktdarstellung aus unitären Darstellungen ist wieder notwendig unitär.

¹³ Daß die beiden Darstellungsräume $\mathfrak{R}'_{(Q+1)}$ und $\mathfrak{R}''_{(Q+1)}$, die bei der räumlichen Spiegelung S ihre Rollen vertauschen, zur selben irreduziblen Darstellung $\mathfrak{U}_{Q/2}$ der \mathfrak{d}_3 gehören, ist eine Folge der Vertauschbarkeit jeder räumlichen Drehung $D \in \mathfrak{d}_3$ mit der räumlichen Spiegelung S , nämlich: $DS = SD$.

^{13a} Wegen der Vertauschbarkeit jeder räumlichen Drehung $D \in \mathfrak{d}_3$ mit der räumlichen Spiegelung S ist allgemein immer $\overline{\mathfrak{R}}'_{(Q+1)} \oplus \overline{\mathfrak{R}}''_{(Q+1)}$ wieder der gesamte Darstellungsraum $\mathfrak{R}'_{(Q+1)} \oplus \mathfrak{R}''_{(Q+1)}$ zur irreduziblen Darstellung $\mathfrak{U}_{Q/2} \oplus \mathfrak{U}_{Q/2}$ der \mathfrak{D}_3 , wenn $\overline{\mathfrak{R}}'_{(Q+1)}$ und $\overline{\mathfrak{R}}''_{(Q+1)}$ zwei linear unabhängige Linear kombinationen von $\mathfrak{R}'_{(Q+1)}$ und $\mathfrak{R}''_{(Q+1)}$ sind; $\mathfrak{R}'_{(Q+1)}$ und $\mathfrak{R}''_{(Q+1)}$ sind Unterräume, die invariante Darstellungsräume zur irreduziblen Darstellung $\mathfrak{U}_{Q/2}$ der \mathfrak{d}_3 sind.

¹⁴ Teilchen mit verschwindender Ruhmasse $m = 0$ müssen gesondert behandelt werden; dies rührt daher, daß sie sich stets mit Lichtgeschwindigkeit c bewegen und daher eine LORENTZ-Transformation in das Ruhssystem des Teilchens unmöglich ist, während man die Bewegung von Teilchen mit endlicher Ruhmasse stets nach einer geeigneten LORENTZ-Transformation im Ruhssystem des Teilchens beschreiben kann. Diese Tatsache begründet einen grundsätzlichen Unterschied zwischen der Behandlung von Teilchen mit verschwindender und Teilchen mit endlicher, nicht verschwindender Ruhmasse (vgl. [2]).

¹⁵ Die Annahme, daß die \mathfrak{d}_3 in $\mathfrak{R}'_{(2s+1)}$ eine vollreduzible Transformationsgruppe induziert, würde nicht die Richtungsquantelung des Spins s in die $2s + 1$ Einstellmöglichkeiten bezüglich einer vorgegebenen Raumrichtung beschreiben, wie wir es aus der Erfahrung mit Spin- und analog zu behandelnden Bahndrehimpulsen zu erwarten haben; daß man Spin- und Bahndrehimpulse in ganz analoger Weise beschreibt ist ja eine naheliegende Annahme (vgl. [46], S. 142 f.). Die bekannten Überlegungen zu diesem Punkt für den Sonderfall des Spins $1/2$ lassen sich leicht auf den allgemeineren Fall beliebigen halbganzen Spins erweitern, so daß die \mathfrak{d}_3 in $\mathfrak{R}'_{(2s+1)}$ eine irreduzible Transformationsgruppe induzieren muß, nämlich die irreduzible Darstellung \mathfrak{U}_s der \mathfrak{d}_3 (vgl. etwa [47], Kap. VII, §§ 8, 9).

¹⁶ $A_{(3)}$ bezeichnet einen Operator der alternierenden Gruppe \mathfrak{A}_3 von drei Elementen.

¹⁷ Eine explizite Darstellung durch hermitesche Matrizen mit $2s + 1$ Zeilen und Spalten lautet:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{P,Q} &= \sqrt{(P+1)(2s-P)} \delta^{P,Q-1} + \sqrt{P(2s-P+1)} \delta^{P,Q+1} \\ \sigma_2^{P,Q} &= -i \sqrt{(P+1)(2s-P)} \delta^{P,Q-1} + i \sqrt{P(2s-P+1)} \delta^{P,Q+1} \\ \sigma_3^{P,Q} &= (s-P) \delta^{P,Q}\end{aligned}$$

Zeilenindex $P = 0, 1, 2, \dots, 2s$, Spaltenindex $Q = 0, 1, 2, \dots, 2s$; wie man leicht nachrechnet, erfüllen unsere Matrizen die Beziehung:

$$\overrightarrow{(\sigma)}^2 = (\sigma_1)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2 = s(s+1)E$$

mit E = Einheitsmatrix vom Rang $2s + 1$ (vgl. [9]).

¹⁸ Diese Darstellungseigenschaften lassen sich leicht an einfachen Fällen veranschaulichen: $\mathfrak{D}_{1/2, 1/2}$ ist die irreduzible und natürlich eindeutige Darstellung der eigentlichen LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4^+ durch sich selbst. Die Ausreduktion (5.3) der beiden Spinoren $a^{(+0)\dot{\mu}}_{\nu}$ und $a^{(-0)\dot{\mu}}_{\nu}$ und ihrer Darstellungsräume nach \mathfrak{D}_3 , bzw. sogar der vollen LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 und deren invarianten Darstellungsräumen

liefert einen Vierervektor A_n und einen Pseudovektor $A_{\{klm\}}$, wobei A_n dem Spinor $u^{(+)\dot{\mu}}_{\nu}$, $A_{\{klm\}}$ dem Spinor $u^{(-)\dot{\mu}}_{\nu}$ entspricht. $\mathfrak{D}_{0,0}$ ist die irreduzible Darstellung der \mathfrak{Q}_4^+ durch skalare Größen; die Ausreduktion der beiden spinoriellen Skalare $a^{(+0)}$ und $a^{(-0)}$, die bezüglich der \mathfrak{Q}_4^+ skalare Größen sind und für die $S a^{(+0)} = a^{(-0)}$, $S a^{(-0)} = a^{(+0)}$, nach der \mathfrak{D}_3 und sogar der \mathfrak{Q}_4 liefert in bezug auf die volle LORENTZ-Gruppe \mathfrak{Q}_4 eine skalare Größe, nämlich

$$u^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^{(+0)} + a^{(-0)}), \text{ und einen Pseudoskalar } u^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^{(+0)} - a^{(-0)}),$$

wofür offensichtlich gilt: $S u^{(+)} = + u^{(+)}$, $S u^{(-)} = - u^{(-)}$.

¹⁹ Diese bemerkenswerte Tatsache, die sich ohne Schwierigkeiten aus der Darstellungstheorie der $\mathfrak{Q}_4 = \mathfrak{Q}_4^+ + S \mathfrak{Q}_4^+$ notwendig ergibt vermöge der Homomorphie $\mathfrak{c}_2 \sim \mathfrak{Q}_4^+$, wurde in bisherigen Arbeiten, in denen Wellenfelder von Teilchen mit ganzzahligen Spin s , $2s \equiv 0(2)$, durch Spinorfelder beschrieben werden ([1], [5]) nicht berücksichtigt; man beschreibt das Spinwellenfeld getrost durch

einen Spinor vom Typ $u^{(+)} \begin{smallmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_s \end{smallmatrix}$, der gegen die räumliche Spiegelung S

invariant sein soll, der also zum Spiegelungscharakter $+1$ gehört. Die Spinorgröße

$u^{(-)} \begin{smallmatrix} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_s \\ \nu_1 \nu_2 \dots \nu_s \end{smallmatrix}$, die bei räumlicher Spiegelung S das Vorzeichen wechselt, also

zum Spiegelungscharakter -1 gehört, wird ohne Begründung vernachlässigt und gleich Null gesetzt; dadurch verliert man aber die Ansätze zum Spiegelungscharakter -1 , die ebenso wie die Größen zum Spiegelungscharakter $+1$ ihre Bedeutung und Berechtigung haben. Durch diese völlig willkürliche Einschränkung, die man durch die Zusatzbedingung $u^{(-)} = 0$ mathematisch formulieren kann, wird einerseits die mathematische Allgemeinheit des Ansatzes schon bei der Behandlung von Wellenfeldern kräftefreier Spinteilchen eingeschränkt, wenn dadurch auch noch keine physikalischen Folgerungen für kräftefreie Spinteilchen entspringen, andererseits verliert man, was für den Physiker sehr bedenklich ist, in physikalischer Hinsicht wichtige Folgerungen aus der Theorie, sobald man verallgemeinernd zur Behandlung von Wellenfeldern für Spinteilchen unter dem Einfluß von Kräften übergeht.

²⁰ Vgl. etwa [2] und [8] im Gegensatz zu [1]; unser Ergebnis stimmt mit dem Ergebnis von FIERZ nach [2] und dem vom Verfasser bereits veröffentlichten Resultat nach [8] überein.

²¹ Vgl. hierzu folgende Arbeiten: [2], [3], [9] und [31].

²² Man setze zu diesem Ende:

$$\gamma^n = \begin{pmatrix} 0 & +i\sigma^n \\ -i\sigma^n & 0 \end{pmatrix} \text{ wo } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die bekannten PAULISCHEN Matrizen sind, $\sigma^4 = i \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} = iE$.

²³ Die Menge unserer zulässigen Bezugssysteme im Raum-Zeit-Kontinuum \mathfrak{R}_4 mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 sei \mathfrak{R} ; dabei gibt es für zwei Bezugssysteme $K \in \mathfrak{R}$ und $K' \in \mathfrak{R}$ immer eine LORENTZ-Transformation $L \in \mathfrak{Q}_4$, so daß — symbolisch geschrieben — $K' = L K$, also K durch L in K' übergeführt wird; aber es gibt ebenso zu $K \in \mathfrak{R}$ und jeder LORENTZ-Transformation $L \in \mathfrak{Q}_4$ ein $K' = L K$ derart, daß notwendig $K' \in \mathfrak{R}$ ist: man schreibt symbolisch $\mathfrak{Q}_4 \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$. Wir unterteilen nun $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ in zwei fremde Untermengen derart, daß $\mathfrak{Q}_4^+ \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1$,

$\mathfrak{L}_4^+ \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2$ und $S \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2$, $S \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_1$. Dann können wir den Tensor von LEVI-CIVITA bekanntlich wie folgt definieren:

$$\delta_{\{klmn\}} = \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ wenn } (k, l, m, n) = \mathfrak{P}_4^+(1, 2, 3, 4) \\ -1 \text{ wenn } (k, l, m, n) = \mathfrak{P}_4^-(1, 2, 3, 4) \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right\} \text{ in } \mathfrak{R}_1$$

$$\delta_{\{klmn\}} = \left\{ \begin{array}{l} -1 \text{ wenn } (k, l, m, n) = \mathfrak{P}_4^+(1, 2, 3, 4) \\ +1 \text{ wenn } (k, l, m, n) = \mathfrak{P}_4^-(1, 2, 3, 4) \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right\} \text{ in } \mathfrak{R}_2$$

Unser Tensor ist offensichtlich gegen Transformationen der \mathfrak{L}_4^+ numerisch invariant, bei räumlicher Spiegelung ändert sich nur das Vorzeichen. In der Definition bedeutet \mathfrak{P}_4^+ einen Operator der alternierenden Gruppe \mathfrak{A}_4 von vier Elementen, \mathfrak{P}_4^- einen Operator derjenigen Nebengruppe $I \mathfrak{A}_4$ von \mathfrak{A}_4 , die die \mathfrak{A}_4 zur symmetrischen Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{A}_4 + I \mathfrak{A}_4$ von vier Elementen ergänzt, oder, anders ausgedrückt, $\mathfrak{P}_4^+(1, 2, 3, 4)$ ist eine gerade, $\mathfrak{P}_4^-(1, 2, 3, 4)$ eine ungerade Permutation der vier Elemente $(1, 2, 3, 4)$.

Für $\delta_{\{klmn\}}$ gelten folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \delta_{\{klmn\}} \delta_{\{kuvw\}} &= \delta_{lu} \delta_{mv} \delta_{nw} + \delta_{lv} \delta_{mw} \delta_{nu} + \delta_{lw} \delta_{mu} \delta_{nv} - \\ &\quad - \delta_{lv} \delta_{mu} \delta_{nw} - \delta_{lu} \delta_{mw} \delta_{nv} - \delta_{lw} \delta_{mv} \delta_{nu} \\ \delta_{\{klmn\}} \delta_{\{kluv\}} &= 2 \{ \delta_{mu} \delta_{nv} - \delta_{mv} \delta_{nu} \} \\ \delta_{\{klmn\}} \delta_{\{klmn\}} &= 6 \delta_{nw} \end{aligned}$$

wobei δ_{ab} der bekannte KRONECKERSche Tensor ist, $\delta_{ab} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ für } a=b \\ 0 \text{ für } a \neq b \end{array} \right\}$, der bei \mathfrak{L}_4 numerisch invariant bleibt.

²⁴ $A_{\{klmn\}}$ ist eine pseudoskalare Dichte vom Gewicht 1 und wie folgt definiert:

$$A_{\{klmn\}} = \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ wenn } (k, l, m, n) = \mathfrak{P}_4^+(1, 2, 3, 4) \\ -1 \text{ wenn } (k, l, m, n) = \mathfrak{P}_4^-(1, 2, 3, 4) \\ 0 \text{ sonst} \end{array} \right\}$$

Unsere Definition ist invariant und sogar numerisch invariant gegen Transformationen der vollen LORENTZ-Gruppe \mathfrak{L}_4 (vgl. Fußnote ²³, S. 353).

²⁵ Man erhält aus (10.34) unmittelbar (10.39) durch Elimination von $F_{\{kl\}}$; aus der zweiten der Gln. (10.34) folgt durch Differentiation nach ∂_l als Identität notwendige Bedingung:

$$\partial_l A_l = \kappa^{-1} \partial_k \partial_l F_{\{kl\}} \equiv 0$$

wegen der Antisymmetrie von $F_{\{kl\}} = -F_{\{lk\}}$.

Eliminiert man nun F_{kl} aus (10.34), dann folgt wegen $\partial_l A_l \equiv 0$:

$$\partial_k \partial_k A_l - \partial_k \partial_l A_k \equiv \square A_l - \partial_l (\partial_k A_k) \equiv \square A_l = \kappa^2 A_l.$$

²⁶ Man erhält aus (10.37) unmittelbar (10.40) durch Elimination von $F_{\{kl\}}$; aus der zweiten der Gln. (10.37) folgt durch geeignete Differentiation als Identität die notwendige Bedingung:

$$\delta_{klmn} \partial_n A_{\{klm\}} \equiv 0.$$

Damit folgt bei der Elimination von $F_{\{kl\}}$ aus (10.37):

$$\partial_k \partial_u A_{\{umn\}} + \partial_m \partial_u A_{\{unk\}} + \partial_n \partial_u A_{\{ukm\}} \equiv \square A_{\{kmn\}} = \kappa^2 A_{\{kmn\}}.$$

Zur Theorie relativistisch invarianter Spinwellen- gleichungen II

Von

Hermann Donnert

Institut für theoretische Physik der Universität Freiburg (Breisgau)*

(Eingegangen am 11. September 1956)

§ 12. Méthode de Fusion

(Siehe [10] bis [16], [22] bis [30])**

DE BROGLIE hat mit seiner Méthode de Fusion ein Verfahren angegeben, wie man durch Verschmelzung von Teilchen mit $s = 1/2$ zu Teilchen mit höherem Spin gelangen kann. Man erhält nach der Methode von DE BROGLIE ein Teilchen vom Spin s , indem man $2s$ gleichartige, punktförmige Teilchen vom Spin $1/2$ durch sehr starke Bindungskräfte in einem Raum-Zeit-Punkt vereinigt, so daß ein stabiles System entsteht. Dabei können sich die $2s$ Spinnmomente vom Wert $1/2$ teils parallel, teils antiparallel zusammensetzen; für unser neu„gebildetes“

Teilchen sind daher die Spinwerte $s, s - 1, s - 2, \dots, \begin{cases} 1/2 & \text{für } s \equiv 1(2) \\ 0 & \text{für } s \equiv 0(2) \end{cases}$

möglich. Das Verschmelzungsverfahren bildet sich auf die den Teilchen entsprechenden Wellenfelder ab. Im Transformationsverhalten von $2s$ verschmolzenen Spin- $1/2$ -Teilchen äußert sich dies in folgender Weise: Die Wellenfunktionen des Spin- $1/2$ -Teilchens transformieren sich nach der Summe der irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_{1/2,0}$ und $\mathfrak{D}_{0,1/2}$ der \mathfrak{L}_4^+ , also nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{1/2,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,1/2}$ der \mathfrak{L}_4 ; im unrelativistischen Grenzfall geht dies bekanntlich in die irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{U}_{1/2}$ und $\mathfrak{U}_{1/2}$ der \mathfrak{d}_3 , bzw. $\mathfrak{U}_{1/2} \oplus \mathfrak{U}_{1/2}$ der \mathfrak{D}_3 über. Setzt man nun $2s$ derartige Felder zum Spin $1/2$ zusammen, dann bewirkt die Zusammensetzung der $2s$ Spins vom Wert $1/2$ eine Transformation der resultierenden Wellenfunktion nach einer $2s$ -fachen KRONECKERschen Produkttransformation

$$(\mathfrak{U}_{1/2} \oplus \mathfrak{U}_{1/2})^{\times 2s} = \sum_{R=0}^Z \oplus 2\alpha_{s,R} \mathfrak{U}_{s-R} \quad (12.1)$$

* Derzeitige Anschrift: Dr. HERMANN J. DONNERT, CWL., Rad. Div., Army Chemical Center, Edgewood, Md., USA.

** Literatur siehe Teil I: Acta Phys. Austr. 11, 321 (1957).

wo $Z = s$ für $2s \equiv 0(2)$, $Z = s - 1/2$ für $2s \equiv 1(2)$ ist. Die Ausreduktion nach (12.1) zu einer Summe von irreduziblen Bestandteilen der KRONECKERSCHEN Produktdarstellung ist immer möglich; man erhält damit eine Aufspaltung der nach den verschiedenen möglichen Spinwerten des Systems. Die ganzzahligen Koeffizienten $\alpha_{s,R}$, die angeben wie oft die irreduzible Darstellung $\mathfrak{U}_{s-R} \oplus \mathfrak{U}_{s-R}$ der \mathfrak{D}_3 in der Produktdarstellung (12.1) enthalten ist, sind in jedem Fall zu ermitteln. Aus den Darstellungseigenschaften sieht man leicht, daß jedes \mathfrak{U}_{s-R} mit geradzahlgiger Multiplizität auftritt, der Faktor 2 innerhalb des Summenzeichens in (12.1) also berechtigt ist; weiters sind alle $\alpha_{s,Q} \neq 0$ für $Q = 0, 1, 2, \dots, Z$, so daß die zum Spin $s - Q$ gehörige irreduzible Darstellung $\mathfrak{U}_{s-R} \oplus \mathfrak{U}_{s-R}$ mindestens einmal vorkommt, für jeden der möglichen Werte $R = 0, 1, 2, \dots, Z$; insbesondere kommt auch die zum Spin s gehörige irreduzible Darstellung der \mathfrak{D}_3 mindestens einmal vor.

Im Fall der relativistisch invarianten Behandlung bewirkt die Zusammensetzung der $2s$ Spins vom Wert $1/2$ ebenfalls eine Transformation der resultierenden Wellenfunktion nach einer KRONECKERSCHEN Produkttransformation, nämlich

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{D}_{1/2,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,1/2})^{\times 2s} = \\ & + \sum_{R=0}^Z \oplus \sum_{Q=s-R}^Y \oplus \beta_{s,R,Q} (\mathfrak{D}_{(s+Q-R)/2, (s-Q-R)/2} \oplus \mathfrak{D}_{(s-Q-R)/2, (s+Q-R)/2}) \end{aligned} \quad (12.2)$$

wobei für $2s \equiv 0(2)$ $Z = s$ und $Y = 0$, für $2s \equiv 1(2)$ $Z = s - 1/2$ und $Y = 1/2$ ist; die Summationsparameter sind $R = 0, 1, 2, \dots, Z$, $Q = s - R, s - R - 1, s - R - 2, \dots, Y$. Die Ausreduktion der KRONECKERSCHEN Produktdarstellung nach (12.2) in eine in eine Summe von irreduziblen Darstellungen der \mathfrak{Q}_4 ist immer möglich. Die ganzzahligen Koeffizienten $\beta_{s,R,Q}$ sind in jedem Fall zu ermitteln. Aus den Darstellungseigenschaften sieht man leicht, daß alle $\beta_{s,R,Q} \neq 0$ sind, so daß jede der irreduziblen Darstellungen der \mathfrak{Q}_4 , die in (12.2) als Summanden auftreten, mindestens einmal vorkommt. Insbesondere treten auch alle zum Spin s gehörigen irreduziblen Darstellungen der \mathfrak{Q}_4 mindestens einmal auf; leicht zu sehen ist auch, daß $\beta_{s,0,s} = 1$ ist, die irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}_{s,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,s}$ der \mathfrak{Q}_4 tritt also genau einmal auf. Zwischen den Koeffizienten $\beta_{s,R,Q}$ in (12.1) und $\alpha_{s,R}$ in (12.1) besteht die Beziehung:

$$\alpha_{s,R} = \sum_{Q=s-R}^Y \beta_{s,R,Q} \quad (12.3)$$

Während wir in unseren bisherigen Überlegungen schon von den zu irreduziblen Darstellungen der \mathfrak{Q}_4^+ , bzw. \mathfrak{Q}_4 gehörigen Spinoren, die vollsymmetrisch sind, ausgingen, erhält man durch (12.2) zu komplizierten Produktdarstellungen der \mathfrak{Q}_4^+ , bzw. \mathfrak{Q}_4 gehörige Spinoren, die überhaupt keine Symmetrieeigenschaften aufweisen; um die zu einem festen Spinwert s gehörigen vollsymmetrischen Feldspinoren, die sich

nach einer irreduziblen Darstellung der \mathfrak{L}_4^+ , bzw. \mathfrak{L}_4 transformieren, zu erhalten, muß man erst die Produktdarstellung nach (12.2) in die irreduziblen Bestandteile ausreduzieren. Diese Ausreduktion läuft auf eine Bestimmung der Koeffizienten $\beta_{s,R,Q}$ hinaus, die im allgemeinen Fall sehr umständlich und mühsam ist.

DE BROGLIES Vorschrift geht aber noch weiter; er gibt ein Verfahren an, wie man nicht bloß die Transformationseigenschaften der Wellenfunktion zu Spin s erhält — darin wäre DE BROGLIES Methode unseren Überlegungen, die im wesentlichen auch schon von DIRAC und FIERZ herangezogen wurde, weit unterlegen —, sondern es enthält auch eine Vorschrift, wie man die zugehörigen Wellengleichungen zu konstruieren habe. DE BROGLIE geht dabei von der DIRAC-Gleichung für kräftefreie Teilchen mit Spin $1/2$ in der Form

$$(\gamma_n \partial_n + \kappa) \psi = 0 \quad (12.4) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

aus, wobei ψ eine Spaltenmatrix mit 4 Zeilen ist, die hyperkomplexen Größen γ_n sind Matrizen vom Rang 4, die die bekannten Vertauschungsrelationen

$$\gamma_m \gamma_n + \gamma_n \gamma_m = 2 \delta_{mn} E \quad (12.5)$$

befriedigen, wo E die Einheitsmatrix vom Rang 4 und δ_{mn} der KRONECKERSche Tensor ist. Nach DE BROGLIE gehört zur Verschmelzungsstufe $2s$, die unter anderem auch Felder von Teilchen mit Spin s beschreibt, eine Wellengleichung vom Typ der DIRAC-Gleichung, nämlich

$$(\Gamma_n \partial_n + \kappa) \Psi = 0 \quad (12.6) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

dabei ist Ψ eine Spaltenmatrix mit 4^{2s} Zeilen, die Größen Γ_n sind Matrizen mit 4^{2s} Zeilen und Spalten; die Γ_n sind aus den γ_n nach folgender Vorschrift zu bilden:

$$2s \Gamma_n = \pm \gamma_n \times E \times E \times \dots \times E \pm E \times \gamma_n \times E \times E \times \dots \times E \pm \dots \pm E \times E \times \dots \times E \times \gamma_n \quad (12.7)$$

wobei jeder der $2s$ Summanden ein $2s$ -faches KRONECKER-Produkt ist, in dem $2s - 1$ mal die Matrix E und einmal die Matrix γ_n als Faktor auftritt; die $2s$ Summanden sind weiterhin so gebaut, daß der Faktor γ_n an jeder der möglichen Stellen ein- und nur einmal auftritt. Die Gl. (12.6) beschreibt aber neben Teilchen mit Spin s auch noch Teilchen

mit Spinwerten $s - 1, s - 2, \dots, \begin{cases} 1/2 \text{ für } 2s \equiv 1(2) \\ 0 \text{ für } 2s \equiv 0(2) \end{cases}$; daher muß

(12.6) noch nach den irreduziblen Bestandteilen ausreduziert werden, indem man Ψ nach Komponenten entwickelt, die bei der \mathfrak{L}_4^+ oder der \mathfrak{L}_4 irreduzible Transformationsgruppen erleiden; dies kann man immer durch eine unitäre Transformation von Ψ und Γ_n erreichen, bei der die Γ_n zudem vollreduzibel sind.

Mit dem verwickelten Problem der Ausreduktion von Ψ und Γ_n nach den irreduziblen Bestandteilen der Produktdarstellung (12.2) haben sich schon mehrere Autoren befaßt.

§ 13. Explizite Ausführung der Überlegungen zur Fusionsmethode im Sonderfalle $s = 1$

Es sollen nun die kritischen Überlegungen zum DE BROGLIESchen Verschmelzungsverfahren am einfachsten, nicht mehr trivialen Fall in der Verschmelzungsstufe 2 explizite ausgeführt werden. In der zweiten Verschmelzungsstufe erhält man Wellengleichungen zu den Spinwerten $s = 0$ und $s = 1$; denn es ist:

$$(\mathfrak{D}_{1/2,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,1/2})^{\times 2} = \mathfrak{D}_{1,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,1} \oplus \mathfrak{D}_{1/2,1/2} \oplus \mathfrak{D}_{1/2,1/2} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \quad (13.1)$$

Wir wollen nun eine besonders für unsere Zwecke geeignete Darstellung für die DIRACschen Matrizen γ_n benützen, derart, daß die DIRAC-Gleichung (12.4) in die zwei Gleichungen des Systems (7.8) zerfällt; dies erreicht man, indem man ansetzt:

$$\gamma_n = \begin{pmatrix} 0 & i \sigma_{n\dot{\mu}\nu} \\ i \sigma_{n\dot{\mu}\nu} & 0 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} a^{(+1/2)}_{\dot{\mu}} \\ a^{(-1/2)}_{\nu} \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

wobei die Matrizen σ , die den Zusammenhang zwischen Spinoren geradzahigen Ranges und den dazu äquivalenten Tensorgrößen induzieren, explizite durch folgende Matrizen gegeben sind:

$$\begin{aligned} -\sigma_{1\dot{\mu}\nu} &= +\sigma_1^{\dot{\mu}\nu} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}; & -\sigma_{2\dot{\mu}\nu} &= +\sigma_2^{\dot{\mu}\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \\ -\sigma_{3\dot{\mu}\nu} &= +\sigma_3^{\dot{\mu}\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; & -\sigma_{4\dot{\mu}\nu} &= +\sigma_4^{\dot{\mu}\nu} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.3)$$

so daß die γ_n hermitesch sind und, wie man sehr leicht nachrechnet, die Vertauschungsrelationen (12.5) befriedigen. Die Allgemeinheit der physikalischen Aussagen, die aus der DIRAC-Gleichung folgen, wird durch den speziellen Ansatz (13.2) + (13.3) für die Wellenfunktion und die Matrizen γ_n aus (12.4) nicht eingeschränkt, weil bekanntlich die physikalischen Folgerungen aus der DIRAC-Gleichung (12.4) gegen die Wahl einer speziellen Darstellung für die hyperkomplexen Zahlen γ_n invariant sind, solange nur die γ_n den Vertauschungsrelationen (12.5) genügen. Unser Ansatz (13.2) + (13.3) bietet uns den großen Vorteil, daß wir die Wellengleichungen nach (12.6) in jeder Verschmelzungsstufe als Spinorgleichungen nach dem VAN-DER-WAERDENSchen Spinorkalkül anschreiben können und dadurch auch in höheren Verschmelzungsstufen eine bessere Übersicht gewinnen als wenn wir die Matrizen F_n in (12.6) elementweise nach (12.7) oder nach (12.8) berechnen.

In der zweiten Verschmelzungsstufe erhalten wir als Komponenten der Wellenfunktion vier Spinoren vom Rang 2, die bei \mathfrak{D}_4^+ nach irreduziblen oder vollreduziblen Darstellungen transformiert werden, nämlich:

$$\Psi' = \begin{pmatrix} v^{(+1)}_{\dot{\mu}\dot{\lambda}} \\ v^{(+0)}_{\dot{\mu}\nu} \\ v^{(-0)}_{\nu} \\ v^{(-1)}_{\nu\lambda} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1/2,1/2} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1/2,1/2} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{0,1} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \end{array} \quad (13.4)$$

jeder dieser Spinoren hat vier unabhängige Komponenten, insgesamt umfaßt also Ψ' 16 unabhängige Komponenten, wie es die volle zweite Verschmelzungsstufe verlangt, denn die beiden Spinoren $v^{(+1)}$ und $v^{(-1)}$ sind nicht symmetrisch und haben daher je vier unabhängige Komponenten.

Wir wollen nun zuerst diejenigen Wellengleichungen untersuchen, die aus (12.6) entstehen, wenn wir die Matrizen Γ_n nach unserer modifizierten Verschmelzungsvorschrift (12.8) aufbauen; wir erhalten dabei die beiden linear unabhängigen Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}\Gamma_n' &= \gamma_n \times E \\ \Gamma_n'' &= E \times \gamma_n\end{aligned}\quad (13.5)$$

Wir können nun dank unseres speziellen Ansatzes (13.2) + (13.3) die entstehende Wellengleichung

$$(\Gamma_n' \partial_n + \kappa) \Psi' = 0 \quad (13.6) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

in folgende Gleichungen zerlegen:

$$\left. \begin{aligned}\partial^{\dot{\mu}\alpha} v^{(+0)}_{\alpha} &= i \kappa v^{(+1)}_{\dot{\mu}\dot{\tau}} \\ \partial_{\beta\nu} v^{(+1)}_{\dot{\tau}} &= i \kappa v^{(+0)}_{\nu} \\ \partial_{\beta\nu} v^{(-0)}_{\dot{\beta}} &= i \kappa v^{(-1)}_{\nu\dot{\lambda}} \\ \partial^{\dot{\mu}\alpha} v^{(-1)}_{\alpha\dot{\lambda}} &= i \kappa v^{(-0)}_{\dot{\mu}\dot{\lambda}}\end{aligned}\right\} \quad (13.7) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Ebenso kann man mit

$$\Psi'' = \begin{pmatrix} w^{(+1)}_{\dot{\mu}\dot{\tau}} \\ w^{(+0)}_{\nu} \\ w^{(-0)}_{\dot{\beta}} \\ w^{(-1)}_{\nu\dot{\lambda}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1/2,1/2} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1/2,1/2} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{0,1} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \end{matrix} \quad (13.8)$$

wobei die Spinoren $w^{(+1)}$ und $w^{(-1)}$ keine Symmetrieeigenschaften haben, die Wellengleichung

$$(\Gamma_n'' \partial_n + \kappa) \Psi'' = 0 \quad (13.9) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

in folgende Gleichungen zerlegen:

$$\left. \begin{aligned}\partial^{\dot{\mu}\alpha} w^{(+0)}_{\alpha} &= i \kappa w^{(+1)}_{\dot{\mu}\dot{\tau}} \\ \partial_{\beta\nu} w^{(+1)}_{\dot{\tau}} &= i \kappa w^{(+0)}_{\nu} \\ \partial_{\beta\nu} w^{(-0)}_{\dot{\beta}} &= i \kappa w^{(-1)}_{\nu\dot{\lambda}} \\ \partial^{\dot{\mu}\alpha} w^{(-1)}_{\alpha\dot{\lambda}} &= i \kappa w^{(-0)}_{\dot{\mu}\dot{\lambda}}\end{aligned}\right\} \quad (13.10) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Aus (13.7) und aus (13.10) folgt notwendig:

$$(\square - \kappa^2) \Psi' = 0 \quad (13.11) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$(\square - \kappa^2) \Psi'' = 0 \quad (13.12) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß (13.6) \equiv (13.7) mit (13.9) \equiv (13.10) äquivalent ist, das heißt, es gibt eine unitäre Matrix¹ U , $U^{-1} = \tilde{U}$,

so daß $\Psi' = U \Psi''$, $\Psi''' = \tilde{U} \Psi'$, $\Gamma_n' = U \Gamma_n'' \tilde{U}$, $\Gamma_n''' = \tilde{U} \Gamma_n' U$; man substituiere zu diesem Ende in (13.7) und (13.10) wie folgt:

$$\begin{aligned} v^{(+1)}_{\mu\dot{\tau}} &\longleftrightarrow w^{(+1)}_{\tau\dot{\mu}} & v^{(+0)}_{\mu\nu} &\longleftrightarrow w^{(+0)}_{\nu\dot{\mu}} \\ v^{(-1)}_{\nu\lambda} &\longleftrightarrow w^{(-1)}_{\lambda\nu} & v^{(-0)}_{\mu\nu} &\longleftrightarrow w^{(-0)}_{\nu\dot{\mu}} \end{aligned} \quad (13.13)$$

dem entspricht gerade eine Transformation mit einer geeigneten unitären Matrix U , $U^{-1} = \tilde{U}$; die Substitution (13.13) führt aber gerade (13.7) in (13.10) über und umgekehrt (13.10) in (13.7). Damit ist die behauptete Äquivalenz (13.6) \equiv (13.7) \sim (13.10) \equiv (13.9) bewiesen und wir können uns daher auf die weitere Untersuchung von (13.6) \equiv (13.7) beschränken.

Um zu einer Beschreibung von reinen Spinteilchen mit den Spinwerten $s = 0$ und $s = 1$ zu gelangen, müssen wir die Spinoren in (13.7) nach denjenigen Bestandteilen ausreduzieren, die bei der \mathfrak{L}_4^+ irreduzible Transformationsgruppen erleiden und dabei beachten, daß das Ergebnis der Ausreduktion eine gegen die volle \mathfrak{L}_4 invariante Beschreibung unserer Spinteilchen sein muß. Um die Ausreduktion explizite zu bewerkstelligen setzen wir in kovarianter Weise an:

$$\begin{aligned} v^{(+1)}_{\mu\dot{\tau}} &= a^{(+1)}_{\mu\dot{\tau}} + b^{(+0)}_{\varepsilon\dot{\mu}\dot{\tau}} & \text{mit} & & a^{(+1)}_{\mu\dot{\tau}} \varepsilon_{\mu\dot{\tau}} &= 0 \\ v^{(-1)}_{\nu\lambda} &= a^{(-1)}_{\nu\lambda} + b^{(-0)}_{\varepsilon\nu\lambda} & \text{mit} & & a^{(-1)}_{\nu\lambda} \varepsilon^{\nu\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (13.14) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

dabei transformiert sich bei Transformationen der \mathfrak{L}_4^+ der symmetrische Anteil $a^{(+1)}$ nach $\mathfrak{D}_{1,0}$, der symmetrische Anteil $a^{(-1)}$ nach $\mathfrak{D}_{0,1}$, die beiden antisymmetrischen Anteile $b^{(+0)}$ und $b^{(-0)}$ transformieren sich nach $\mathfrak{D}_{0,0}$; damit haben wir die beiden Spinoren $v^{(+1)}$ und $v^{(-1)}$ in ihre irreduziblen Anteile zerlegt. Mit (13.14) folgt aus (13.7):

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\mu\alpha} v^{(+0)}_{\alpha} + \partial^{\tau\alpha} v^{(+0)}_{\alpha} &= 2 i \kappa a^{(+1)}_{\mu\dot{\tau}} \\ \partial_{\beta\nu} v^{(-0)}_{\lambda} + \partial_{\beta\lambda} v^{(-0)}_{\nu} &= 2 i \kappa a^{(-1)}_{\nu\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (13.15) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\mu}^{\alpha} v^{(+0)}_{\alpha} &= 2 i \kappa b^{(+0)} \\ \partial_{\beta}^{\nu} v^{(-0)}_{\nu} &= 2 i \kappa b^{(-0)} \end{aligned} \right\} \quad (13.16) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\beta\nu} a^{(+1)}_{\beta\dot{\tau}} + \partial_{\beta\nu} b^{(+0)}_{\varepsilon\dot{\mu}\dot{\tau}} &= i \kappa v^{(+0)}_{\nu\dot{\mu}} \\ \partial^{\mu\alpha} a^{(-1)}_{\alpha\lambda} + \partial^{\mu\alpha} b^{(-0)}_{\varepsilon\alpha\lambda} &= i \kappa v^{(-0)}_{\mu\dot{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (13.17) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Wir setzen nun per definitionem:

$$\left. \begin{aligned} v^{(+0)}_{\mu\nu} &= a^{(+0)}_{\mu\nu} - b^{(+0)}_{\nu\dot{\mu}} \\ v^{(-0)}_{\mu\nu} &= a^{(-0)}_{\mu\nu} - b^{(-0)}_{\nu\dot{\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (13.18) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

gerade so, daß man an Stelle von (13.17) schreiben kann:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\beta\nu} a^{(+1)}_{\beta\dot{\tau}} &= i \kappa a^{(+0)}_{\nu\dot{\mu}} \\ \partial^{\mu\alpha} a^{(-1)}_{\alpha\lambda} &= i \kappa a^{(-0)}_{\mu\dot{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (13.19) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\nu}^{\dot{\tau}} b^{(+0)} &= i \kappa b^{(+0)}_{\nu\dot{\mu}} \\ \partial_{\lambda}^{\dot{\mu}} b^{(-0)} &= i \kappa b^{(-0)}_{\mu\dot{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (13.20) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Aus (13.19) und (13.20) folgen nach einfacher Rechnung die Identitäten:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\mu\alpha} b^{(+0)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}} + \partial^{\dot{\tau}\alpha} b^{(+0)}_{\alpha}{}^{\dot{\mu}} &\equiv 0 \\ \partial_{\beta\nu} b^{(-0)}_{\lambda}{}^{\dot{\beta}} + \partial_{\beta\lambda} b^{(-0)}_{\nu}{}^{\dot{\beta}} &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.21) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\alpha}_{\dot{\tau}} a^{(-0)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}} &\equiv 0 \\ \partial^{\dot{\lambda}}_{\dot{\beta}} a^{(-0)}_{\lambda}{}^{\dot{\beta}} &\equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.22) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Mit (13.18) + (13.21) + (13.22) kann man an Stelle von (13.15) + (13.16) folgende Gleichungen benutzen:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\mu\alpha} a^{(+0)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}} + \partial^{\dot{\tau}\alpha} a^{(+0)}_{\alpha}{}^{\dot{\mu}} &= 2 i \kappa a^{(+1)}_{\mu\dot{\tau}} \\ \partial_{\beta\nu} a^{(-0)}_{\lambda}{}^{\dot{\beta}} + \partial_{\beta\lambda} a^{(-0)}_{\nu}{}^{\dot{\beta}} &= 2 i \kappa a^{(-1)}_{\nu\dot{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (13.23) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\alpha}_{\dot{\tau}} b^{(+0)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}} &= -2 i \kappa b^{(+0)} \\ \partial^{\dot{\lambda}}_{\dot{\beta}} b^{(-0)}_{\lambda}{}^{\dot{\beta}} &= -2 i \kappa b^{(-0)} \end{aligned} \right\} \quad (13.24) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

In der Form der Gleichungssysteme (13.19) + (13.23) und (13.20) + (13.24) ist die Ausreduktion unserer Verschmelzungsgleichungen (13.7) in kovarianter Weise bezüglich der \mathfrak{L}_4 nach den irreduziblen Darstellungsbestandteilen der \mathfrak{L}_4 vollständig ausgeführt. Das Feld zum Spinwert 1 wird durch die Wellengleichungen (13.19) + (13.23) beschrieben; diese sind aber identisch mit unserem ursprünglichen Ansatz (7.11). Das Feld zum Spinwert 0 wird durch die Wellengleichungen (13.20) + (13.24) beschrieben; diese sind aber mit unserem ursprünglichen Ansatz (8.2) + (8.3) identisch.

Nunmehr wollen wir die nach der ursprünglichen, von DE BROGLIE gegebenen Vorschrift in der zweiten Verschmelzungsstufe entstehenden Wellengleichungen untersuchen. Dabei treten zwei inäquivalente Fälle auf, je nachdem, ob wir nach (12.7) für die Matrizen Γ_n die möglichen Ansätze

$$\Gamma_n^{(+)} = \gamma_n \times E + E \times \gamma_n \quad (13.25)$$

$$\Gamma_n^{(-)} = \gamma_n \times E - E \times \gamma_n \quad (13.26)$$

verwenden. Betrachten wir zuerst den Fall (13.25), der zum System der Wellengleichungen

$$(\Gamma_n^{(+)} + \kappa) \Psi^{(+)} = 0 \quad (13.27) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

führt, wo

$$\Psi^{(+)} = \begin{pmatrix} u^{(+1)}_{\mu\dot{\tau}} \\ u^{(+0)}_{\nu}{}^{\dot{\mu}} \\ u^{(0)}_{\nu}{}^{\dot{\mu}} \\ u^{(-1)}_{\nu\dot{\lambda}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1/2, 1/2} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1/2, 1/2} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{0,1} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \end{array} \quad (13.28)$$

Unter Verwendung des Spinorkalküls können wir (13.27) in folgender Weise zerlegen²:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\dot{\mu}\alpha} u^{(+0)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}} + \partial^{\dot{\tau}\alpha} u^{(-0)}_{\alpha}{}^{\dot{\mu}} &= 2 i \kappa u^{(+1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\mu}\dot{\tau}} \\ \partial_{\beta\nu} u^{(-0)}_{\lambda}{}^{\dot{\beta}} + \partial_{\beta\lambda} u^{(+0)}_{\nu}{}^{\dot{\beta}} &= 2 i \kappa u^{(-1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}} \\ \partial_{\beta\nu} u^{(+1)}_{\nu\alpha}{}^{\dot{\beta}\dot{\tau}} + \partial^{\dot{\tau}\alpha} u^{(-1)}_{\nu\alpha}{}^{\dot{\beta}} &= 2 i \kappa u^{(+0)}_{\nu}{}^{\dot{\tau}} \\ \partial^{\dot{\tau}\alpha} u^{(-1)}_{\alpha\nu}{}^{\dot{\tau}} + \partial_{\beta\nu} u^{(+1)}_{\nu}{}^{\dot{\beta}} &= 2 i \kappa u^{(-0)}_{\nu}{}^{\dot{\tau}} \end{aligned} \right\} \quad (13.29) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

In (13.29) müssen nun wieder die Spinoren nach den Bestandteilen ausreduziert werden, die bei der \mathfrak{L}_4^+ irreduzible Transformationsgruppen erleiden, wobei die entstehenden Wellengleichungen eine gegen die \mathfrak{L}_4 invariante Beschreibung liefern müssen. Zu diesem Ende setzen wir an:

$$\left. \begin{aligned} u^{(+1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\mu}\dot{\tau}} &= q^{(+1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\mu}\dot{\tau}} + r^{(+0)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\mu}\dot{\tau}} & \text{mit} & \quad q^{(+1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\mu}\dot{\tau}} \varepsilon_{\dot{\mu}\dot{\tau}} = 0 \\ u^{(-1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}} &= q^{(-1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}} + r^{(-0)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}} & \text{mit} & \quad q^{(-1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}} \varepsilon^{\dot{\beta}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.30) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Bei \mathfrak{L}_4^+ transformiert sich $q^{(+1)}$ nach $\mathfrak{D}_{1,0}$, $q^{(-1)}$ nach $\mathfrak{D}_{0,1}$, $r^{(+0)}$ und $r^{(-0)}$ beide nach $\mathfrak{D}_{0,0}$; damit haben wir $u^{(+1)}$ und $u^{(-1)}$ ausreduziert.

Setzen wir (13.30) in (13.29) ein, dann erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\dot{\mu}\alpha} [u^{(+0)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}} + u^{(-0)}_{\alpha}{}^{\dot{\mu}}] + \partial^{\dot{\tau}\alpha} [u^{(+0)}_{\alpha}{}^{\dot{\mu}} + u^{(-0)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}}] &= 4 i \kappa q^{(+1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\mu}\dot{\tau}} \\ \partial_{\beta\nu} [u^{(+0)}_{\lambda}{}^{\dot{\beta}} + u^{(-0)}_{\lambda}{}^{\dot{\beta}}] + \partial_{\beta\lambda} [u^{(+0)}_{\nu}{}^{\dot{\beta}} + u^{(-0)}_{\nu}{}^{\dot{\beta}}] &= 4 i \kappa q^{(-1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}} \end{aligned} \right\} \quad (13.31) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\partial_{\beta\nu} q^{(+1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}\dot{\tau}} + \partial^{\dot{\tau}\alpha} q^{(-1)}_{\alpha\nu}{}^{\dot{\beta}} - i \kappa [u^{(+0)}_{\nu}{}^{\dot{\tau}} + u^{(-0)}_{\nu}{}^{\dot{\beta}}] \quad (13.32) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\partial_{\beta\nu} q^{(+1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}\dot{\tau}} - \partial^{\dot{\tau}\alpha} q^{(-1)}_{\alpha\nu}{}^{\dot{\beta}} \equiv 0 \quad (13.33) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei (13.33) wegen (13.31) als Identität erfüllt ist. Weiterhin erhalten wir aus (13.29) mit (13.30):

$$\partial^{\dot{\mu}\alpha} [u^{(+0)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}} - u^{(-0)}_{\alpha}{}^{\dot{\mu}}] = -4 i \kappa r^{(+0)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\mu}\dot{\tau}} \quad (13.34) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\partial^{\dot{\beta}}_{\beta} [u^{(+0)}_{\lambda}{}^{\dot{\beta}} - u^{(-0)}_{\lambda}{}^{\dot{\beta}}] = -4 i \kappa r^{(-0)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}} \quad (13.35) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\partial^{\dot{\tau}}_{\nu} [r^{(+0)}_{\nu}{}^{\dot{\tau}} - r^{(-0)}_{\nu}{}^{\dot{\beta}}] = -i \kappa [u^{(+0)}_{\nu}{}^{\dot{\tau}} - u^{(-0)}_{\nu}{}^{\dot{\beta}}] \quad (13.36) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei (13.36) wegen (13.34) als Identität erfüllt ist.

Zur Vereinfachung von (13.31) + (13.32) definieren wir:

$$u^{(+0)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}} + u^{(-0)}_{\alpha}{}^{\dot{\mu}} = 2 q^{(+)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}} \quad (13.37) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Setzen wir (13.37) in (13.31) + (13.32) ein, dann erhalten wir als Wellengleichungen für das Teilchen vom Spin 1:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\dot{\mu}\alpha} q^{(+)}_{\alpha}{}^{\dot{\tau}} + \partial^{\dot{\tau}\alpha} q^{(+)}_{\alpha}{}^{\dot{\mu}} &= 2 i \kappa q^{(+1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\mu}\dot{\tau}} \\ \partial_{\beta\nu} q^{(+)}_{\lambda}{}^{\dot{\beta}} + \partial_{\beta\lambda} q^{(+)}_{\nu}{}^{\dot{\beta}} &= 2 i \kappa q^{(-1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}} \end{aligned} \right\} \quad (13.38) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\partial_{\beta\nu} q^{(+1)}_{\nu\lambda}{}^{\dot{\beta}\dot{\tau}} + \partial^{\dot{\tau}\alpha} q^{(-1)}_{\alpha\nu}{}^{\dot{\beta}} = 2 i \kappa q^{(+)}_{\nu}{}^{\dot{\tau}} \quad (13.39) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Der erhaltene Ansatz (13.38) + (13.39) für das Feld zum Spin 1 ist aber mit den Wellengleichungen (10.44) für ein Vektorteilchen identisch; man verfügt also offensichtlich durch den Ansatz (13.25) in ganz bestimmter Weise über das in (13.5) noch verfügbar gelassene Verhalten unserer Feldfunktionen gegen die räumliche Spiegelung S .

Zur Vereinfachung von (13.34) + (13.35) definieren wir:

$$u^{(+0)}_{\alpha} - u^{(-0)}_{\alpha} = 2 r^{(-)}_{\alpha} \quad (13.40) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

weiterhin dürfen wir per definitionem

$$r^{(+0)} - r^{(-0)} = r^{(-)} \quad (13.41) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

setzen und in unsere Wellengleichungen einführen, weil der davon unabhängige Ausdruck verschwindet, nämlich

$$r^{(+0)} + r^{(-0)} \equiv 0 \quad (13.42) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

als notwendige Folge von (13.34); damit können wir unsere Wellengleichungen zum Spinwert 0 umformen zu:

$$\left. \begin{aligned} \partial_{\tau}^{\alpha} r^{(-)}_{\alpha} &= i \kappa r^{(-)} \\ \partial_{\nu}^{\mu} r^{(-)} &= -2 i \kappa r^{(-)}_{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (13.43) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Die erhaltenen Wellengleichungen (13.43) sind aber identisch mit den Wellengleichungen (10.25) für pseudoskalare Teilchen; wiederum zeigt sich, daß man durch den Ansatz (13.25) in ganz bestimmter Weise über das in (13.5) noch verfügbar gelassene Verhalten unserer Feldfunktionen gegen die räumliche Spiegelung S verfügt.

Vergleichen wir unser Ergebnis mit unseren vorhergehenden Betrachtungen! Unser modifizierter Fusionsansatz (13.5) + (13.6) führt nach Ausreduktion bezüglich irreduzibler Darstellungen der \mathfrak{L}_4^{+} und \mathfrak{L}_4 auf Wellengleichungen zu den Spinwerten 0 und 1, die mit unseren Wellengleichungen (7.11) und (8.2) + (8.3) identisch sind und die im Rahmen unserer physikalisch vernünftigen Grundforderungen (vgl. § 1) die allgemeinste Möglichkeit darstellen, Wellengleichungen zu den Spinwerten 0 und 1 anzusetzen. Die spezielleren Fälle der vektoriellen und pseudoskalaren Felder erhält man daraus nach unseren Untersuchungen in § 10 durch die Zusatzbedingungen (10.41) und (10.22), mit denen über das Verhalten der Feldfunktionen bei räumlicher Spiegelung S in wohldefinierter Weise a priori einschränkend verfügt wird. Man darf nun unser Ergebnis so interpretieren, daß durch die spezielle DE BROGLIE-Verschmelzung (13.25) gerade die Erfüllung der Zusatzbedingungen (10.41) und (10.22) a priori erzwungen wird, so daß man die speziellen Fälle vektorieller und pseudoskalarer Felder aus dem Verschmelzungsprozeß gewinnt. Analog dazu erzwingt die Verschmelzungsvorschrift (13.26) a priori die Erfüllung einschränkender Zusatzbedingungen, die mit (10.13) und (10.47) identisch oder äquivalent sind, so daß man auf die Wellengleichungen für die speziellen Fälle der skalaren und pseudovektoriellen Felder geführt wird, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Untersuchen wir nun die Folgerungen aus dem DE BROGLIESchen Verschmelzungsansatz (13.26)! Wir erhalten das System von Wellengleichungen

$$(\Gamma_n^{(-)} + \kappa) \Psi^{(-)} = 0 \quad (13.44) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wo

$$\Psi^{(-)} = \begin{pmatrix} z^{(+1)}_{\alpha} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \\ z^{(+0)}_{\nu} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \\ z^{(-0)}_{\nu} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \\ z^{(-1)}_{\nu\lambda} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1/2, 1/2} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{1/2, 1/2} \\ \text{Transformation nach } \mathfrak{D}_{0,1} \oplus \mathfrak{D}_{0,0} \end{array} \quad (13.45) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Unter Verwendung des Spinorkalküls können wir (13.44) in folgender Weise zerlegen³:

$$\left. \begin{array}{l} \partial^{\dot{\mu}\alpha} z^{(+0)}_{\alpha} \dot{\tau} - \partial^{\dot{\tau}\alpha} z^{(-0)}_{\alpha} \dot{\mu} = 2 i \kappa z^{(+1)}_{\alpha} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \\ \partial_{\dot{\beta}\nu} z^{(-0)}_{\lambda} \dot{\beta} - \partial_{\dot{\beta}\lambda} z^{(+0)}_{\nu} \dot{\beta} = 2 i \kappa z^{(-1)}_{\nu\lambda} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \\ \partial_{\dot{\beta}\nu} z^{(+1)}_{\lambda} \dot{\beta}^{\dot{\tau}} - \partial^{\dot{\tau}\alpha} z^{(-1)}_{\nu\alpha} = 2 i \kappa z^{(+0)}_{\nu} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \\ \partial^{\dot{\tau}\alpha} z^{(-1)}_{\alpha\nu} - \partial_{\dot{\beta}\nu} z^{(+1)}_{\lambda} \dot{\tau}^{\dot{\beta}} = 2 i \kappa z^{(-0)}_{\nu} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \end{array} \right\} \quad (13.46) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Zur Ausreduktion von (13.46) nach denjenigen Spinoranteilen, die bei der \mathfrak{L}_4^+ irreduzible Transformationsgruppe erleiden und die wir wieder unter Invarianz gegen die volle \mathfrak{L}_4 durchführen müssen, setzen wir an:

$$\left. \begin{array}{l} z^{(+1)}_{\alpha} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} = \phi^{(+1)}_{\alpha} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} + s^{(+0)} \varepsilon^{\dot{\mu}\dot{\tau}} \quad \text{mit} \quad \phi^{(+1)}_{\alpha} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \varepsilon^{\dot{\mu}\dot{\tau}} = 0 \\ z^{(-1)}_{\nu\lambda} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} = \phi^{(-1)}_{\nu\lambda} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} + s^{(-0)} \varepsilon_{\nu\lambda} \quad \text{mit} \quad \phi^{(-1)}_{\nu\lambda} \varepsilon^{\nu\lambda} = 0 \end{array} \right\} \quad (13.47) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Bei \mathfrak{L}_4^+ transformiert sich $\phi^{(+1)}$ nach $\mathfrak{D}_{1,0}$, $\phi^{(-1)}$ nach $\mathfrak{D}_{0,1}$ und $s^{(+0)}$ und $s^{(-0)}$ beide nach $\mathfrak{D}_{0,0}$; damit haben wir $z^{(+1)}$ und $z^{(-1)}$ ausreduziert.

Setzen wir (13.47) in (13.46) ein, dann folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \partial^{\dot{\mu}\alpha} [z^{(-0)}_{\alpha} \dot{\tau} - z^{(+0)}_{\alpha} \dot{\mu}] + \partial^{\dot{\tau}\alpha} [z^{(-0)}_{\alpha} \dot{\mu} - z^{(+0)}_{\alpha} \dot{\tau}] = + 4 i \kappa \phi^{(+1)}_{\alpha} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \\ \partial_{\dot{\beta}\nu} [z^{(-0)}_{\lambda} \dot{\beta} - z^{(+0)}_{\lambda} \dot{\mu}] + \partial_{\dot{\beta}\lambda} [z^{(+0)}_{\nu} \dot{\beta} - z^{(-0)}_{\nu} \dot{\mu}] = - 4 i \kappa \phi^{(-1)}_{\nu\lambda} \dot{\mu}^{\dot{\tau}} \end{array} \right\} \quad (13.48) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\partial_{\dot{\beta}\nu} \phi^{(+1)}_{\lambda} \dot{\beta}^{\dot{\tau}} - \partial^{\dot{\tau}\alpha} \phi^{(-1)}_{\alpha\nu} = i \kappa [z^{(+0)}_{\nu} \dot{\tau} - z^{(-0)}_{\nu} \dot{\mu}] \quad (13.49) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\partial_{\dot{\beta}\nu} \phi^{(+1)}_{\lambda} \dot{\beta}^{\dot{\tau}} + \partial^{\dot{\tau}\alpha} \phi^{(-1)}_{\alpha\nu} \equiv 0 \quad (13.50) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei (13.50) wegen (13.48) notwendig als Identität erfüllt ist. Weiterhin erhalten wir aus (13.46) mit (13.47):

$$\left. \begin{array}{l} \partial^{\dot{\mu}\alpha} [z^{(+0)}_{\alpha} \dot{\tau} + z^{(-0)}_{\alpha} \dot{\mu}] = + 4 i \kappa s^{(+0)} \\ \partial^{\dot{\lambda}\beta} [z^{(+0)}_{\lambda} \dot{\beta} + z^{(-0)}_{\lambda} \dot{\mu}] = + 4 i \kappa s^{(-0)} \end{array} \right\} \quad (13.51) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\partial^{\dot{\tau}}_{\nu} [s^{(+0)} + s^{(-0)}] = - i \kappa [z^{(+0)}_{\nu} \dot{\tau} + z^{(-0)}_{\nu} \dot{\mu}] \quad (13.52) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\partial^{\dot{\tau}}_{\nu} [s^{(+0)} - s^{(-0)}] \equiv 0 \quad (13.53) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

wobei (13.53) wegen (13.51) als Identität erfüllt ist.

Zur Vereinfachung von (13.48) + (13.49) definieren wir:

$$z^{(+0)}_{\alpha} \dot{\tau} - z^{(-0)}_{\alpha} \dot{\tau} = 2 p^{(-)}_{\alpha} \dot{\tau} \quad (13.54) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Setzen wir (13.54) in (13.48) + (13.49) ein, dann erhalten wir als Wellengleichungen zum Spinwert 1:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\dot{\mu}\alpha} p^{(-)}_{\alpha} \dot{\tau} + \partial^{\tau\alpha} p^{(-)}_{\alpha} \dot{\mu} &= + 2 i \kappa p^{(+1)}_{\dot{\mu}\tau} \\ \partial_{\beta\nu} p^{(-)}_{\lambda} \dot{\beta} + \partial_{\beta\lambda} p^{(-)}_{\nu} \dot{\beta} &= - 2 i \kappa p^{(-1)}_{\nu\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (13.55) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

$$\partial_{\beta\nu} p^{(+1)}_{\dot{\beta}\tau} - \partial^{\tau\alpha} p^{(-1)}_{\alpha\nu} = + 2 i \kappa p^{(-)}_{\nu} \dot{\tau} \quad (13.56) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

die hergeleiteten Wellengleichungen (13.55) + (13.56) sind tatsächlich mit den Wellengleichungen (10.49) für das pseudovektorielle Feld identisch.

Zur weiteren Vereinfachung von (13.51) + (13.52) definieren wir:

$$z^{(+0)}_{\alpha} \dot{\tau} + z^{(-0)}_{\alpha} \dot{\tau} = 2 s^{(+)}_{\alpha} \dot{\tau} \quad (13.57) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

weiterhin dürfen wir per definitionem

$$s^{(+0)} + s^{(-0)} = s^{(+)} \quad (13.58) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

setzen und in unsere Wellengleichungen Einführen, weil ein davon linear unabhängiger Ausdruck als notwendige Folge von (13.51) identisch verschwindet, nämlich

$$s^{(+0)} - s^{(-0)} \equiv 0 \quad (13.59) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

damit vereinfachen sich unsere Wellengleichungen zum Spinwert 0 zu:

$$\left. \begin{aligned} \partial^{\tau}_{\dot{\tau}} s^{(+)}_{\alpha} \dot{\tau} - + i \kappa s^{(+)} \\ \partial^{\dot{\mu}}_{\nu} s^{(+)} = - 2 i \kappa s^{(+)}_{\nu} \dot{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (13.60) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

die Wellengleichungen (13.60) sind aber tatsächlich mit den Wellengleichungen (10.15) + (10.17) für das skalare Feld identisch.

Aus der expliziten Durchführung der Rechnung für den einfachsten Fall der Verschmelzungsstufe 2 ist leicht zu ersehen, wie man im Falle höherer Verschmelzungsstufen zu verfahren hat; es ist dabei evident, daß die allgemeinen Betrachtungen aus § 12, die hier für den Fall der Verschmelzungsstufe 2 explizit nachgewiesen wurden, für jede Stufe der Verschmelzung zu Recht bestehen. Das Verfahren expliziter Ausreduktion der Verschmelzungsgleichungen höherer Stufe nach Komponenten, die bei der \mathfrak{L}_4 irreduzible Transformationsgruppen erleiden, unter Erhaltung der Invarianz der Wellengleichungen bezüglich der \mathfrak{L}_4 , wird in den höheren Verschmelzungsstufen langwieriger, läßt sich aber grundsätzlich in jedem Falle ausführen.

Führt man die Verschmelzung der DIRAC-Matrizen γ_n nach der Vorschrift (12.8) aus, dann enthält der vollsymmetrische Anteil der zugehörigen Verschmelzungsgleichungen (12.9) in der Verschmelzungsstufe 2 s stets alle möglichen Systeme vom Typ (6.10) + (6.11) zum Spinwert s und damit den im Sinne unserer Einschränkungen in § 1 allgemeinsten Ansatz für Wellengleichungen zum Spin s . Führt man

hingegen die Verschmelzung nach der DE BROGLIESchen Vorschrift (12.7) aus, dann liefern die Verschmelzungsgleichungen stets Wellengleichungen, bei denen durch Zusatzbedingungen, die der spezielle Verschmelzungsansatz (12.7) als notwendige Folge erzwingt, über das Verhalten der Feldfunktionen bei räumlicher Spiegelung S in ganz bestimmter Weise verfügt ist; dagegen läßt der Ansatz (12.8) + (12.9) den Spiegelungseigenschaften der Feldfunktionen noch vollkommene Freiheit und ist somit allgemeiner als der Ansatz (12.7) + (12.6) nach der DE BROGLIESchen Vorschrift. Andererseits kann man den Ansatz (12.8) + (12.9) durch geeignete Zusatzbedingungen stets auf die Ansätze nach (12.7) + (12.6) spezialisieren.

§ 14. Der Ansatz von Cap und Donnert

(siehe [7], [8], [9], [21], [44])

Auf Grund der Analogie der klassischen Physik und der Quantenmechanik hatte F. CAP die Hypothese aufgestellt, es müsse möglich sein, das Wellenfeld zum Spin s durch eine Wellenfunktion zu beschreiben, die genau $2(2s + 1)$ unabhängige Komponenten hat; diese Annahme trägt dem Verhalten der dem Feld zugeordneten Spinteilchen in der Weise Rechnung, als dann die Zahl der inneren Einstellmöglichkeiten des Spinteilchens, die gerade $2(2s + 1)$ beträgt, mit der Zahl der Raum-Zeit-Funktionen, die das zugehörige Wellenfeld festlegen, übereinstimmt. Man benötigt deshalb keine Nebenbedingungen, um die für die Beschreibung eigentlich überflüssigen Komponenten der Wellenfunktion auszuschalten, denn sie würden sonst das Feld überbestimmen, es finden sich gar keine überflüssigen Komponenten der Wellenfunktion in unserer Beschreibung. Eine Beschreibung des Feldes zum Spin s durch weniger als $2(2s + 1)$ Feldfunktionen würde das Wellenfeld nicht genügend festlegen; man sieht leicht ein, daß eine derartige Beschreibung in relativistisch kovarianter Form unmöglich ist. Gelingt es nun aber eine relativistisch kovariante Beschreibung für die Wellengleichungen zum Spin s zu finden, die der CAPschen Hypothese genügt, dann ist diese Beschreibung unter allen Möglichkeiten die weitaus einfachste, die schon aus Gründen dieser Einfachheit zur Beschreibung des Wellenfeldes von Spinteilchen und des damit verbundenen physikalischen Sachverhaltes am besten geeignet sein müßte und auch ist, so daß sie anderen Möglichkeiten vorzuziehen ist. Es gibt nun tatsächlich eine mathematische Möglichkeit, die CAPsche Hypothese bei der Beschreibung eines Wellenfeldes zum Spin s zu erfüllen.

Es bedarf vielleicht noch einer kurzen Erläuterung, woher die Zahl $2(2s + 1)$ der inneren Einstellmöglichkeiten unseres Spinteilchens mit endlicher Ruhmasse kommt, die wir ja in geeigneter Weise in die Beschreibung des zugehörigen Wellenfeldes hineinstecken wollen. Ein Teilchen mit Spin s und endlicher Ruhmasse hat vermöge der Richtungsquantelung des Spindrehmomentes auf eine feste Raumrichtung bezogen gerade $2s + 1$ mögliche Polarisationszustände; der Faktor 2,

der die Zahl der inneren Einstellmöglichkeiten gerade verdoppelt, trägt dem Umstande Rechnung, daß das Verhalten des zugehörigen Wellenfeldes bei räumlicher Spiegelung S unseres Bezugssystemes im \mathfrak{R}_4 nicht festgelegt ist, das heißt, es gibt zu jeder der $2s + 1$ Spineinstellungen noch Wellenfunktionen, die zum Spiegelungscharakter $+1$ oder -1 gehören können. Einer elektrischen Ladung mit den „Einstellmöglichkeiten“ $+e$ und $-e$ entspricht man in der Beschreibung des zugehörigen Wellenfeldes dadurch, daß man elektrisch geladene Teilchen durch komplexe Felder, elektrisch neutrale Teilchen durch reelle Felder beschreibt; die Verwendung komplexer Wellenfunktionen zur Beschreibung von elektrisch geladenen Teilchen beschreibt gerade die Verdoppelung der inneren Einstellmöglichkeiten unseres Teilchens im Feldbild, die durch seine elektrische Ladung bedingt ist.

Wie läßt sich nun die CAPSche Hypothese bei der Beschreibung des Wellenfeldes eines Teilchens mit Spin s und endlicher Ruhmasse erfüllen? Zur Beschreibung eines Wellenfeldes mit Spin s stehen uns nach (5.1) vollsymmetrische Spinoren als relativistisch kovariante Größen zur Verfügung, nämlich

$$a^{(+Q)} \dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2 \dots \dot{\nu}_{s+Q} \quad Q = +s, +s-1, \dots, -s+1, -s \quad (14.1)$$

$$\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{s-Q}$$

wobei wir stets zwei dieser Spinoren, $a^{(+Q)}$ und $a^{(-Q)}$ verwenden müssen, um eine bezüglich der vollen \mathfrak{L}_4 kovariante Beschreibung unseres Spinwellenfeldes zu erhalten. Die Abzählung der unabhängigen Komponenten des vollsymmetrischen Spinors $a^{(+Q)}$ ergibt

$$f = (s + Q + 1)(s - Q + 1) \quad (14.2)$$

Beschreiben wir das Wellenfeld nun durch die beiden vollsymmetrischen Spinoren $a^{(+Q)}$ und $a^{(-Q)}$, dann treten $2f = 2(s+Q+1)(s-Q+1)$ unabhängige Komponenten auf. Wollen wir die CAPSche Hypothese verwirklichen, dann dürfen wir nur Spinoren verwenden, so daß die Zahl der unabhängigen Komponenten in unserer Beschreibung genau $2(2s+1)$ betragen; die einzige mögliche Lösung dafür ist: $Q = \pm s$. Wir müssen, um die CAPSche Hypothese zu erfüllen, unser Wellenfeld zum Spin s durch die beiden vollsymmetrischen Spinoren

$$a^{(+s)} \dot{\nu}_1 \dot{\nu}_2 \dots \dot{\nu}_{2s} \quad \text{und} \quad a^{(-s)} \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{2s} \quad (14.3) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

beschreiben; jede Information über unser Spinwellenfeld, nach der zu fragen physikalisch sinnvoll ist, muß sich aus diesen beiden vollsymmetrischen Spinoren (14.3) entnehmen lassen. Da unsere Wellenfunktion, dargestellt durch die vollsymmetrischen Spinoren $a^{(+Q)}$ und $a^{(-Q)}$, gerade so viele unabhängige Komponenten besitzt wie das zugehörige Spinteilchen innere Einstellmöglichkeiten, nämlich $2(2s+1)$, sind in unserer Beschreibung keine einschränkenden Nebenbedingungen vom Typ (5.6) notwendig, wie schon in § 5 erläutert wurde. Es ist einerseits evident, daß man ein Spinwellenfeld zu Spin s in relativistisch ko-

varianter Weise nicht durch weniger als $2(2s + 1)$ unabhängige Komponenten beschreiben kann, andererseits würde jede mögliche relativistisch kovariante Beschreibung unseres Spin- s -Wellenfeldes, die nicht gerade und nur die beiden vollsymmetrischen Spinoren (14.3) benützt, mehr als $2(2s + 1)$ unabhängige Komponenten der Wellenfunktion aufweisen, also mehr, als physikalisch rationell und sinnvoll erscheint, und man müßte noch einschränkende Nebenbedingungen vom Typ (5.6) postulieren, wie dies in § 5 diskutiert ist.

Es sei nochmals die Transformationseigenschaften unserer Feldspinoren (13.3), durch die wir das Wellenfeld zum Spin s beschreiben wollen, angeführt: Bei \mathfrak{L}_4^+ transformiert sich der vollsymmetrische Spinor $a^{(+s)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{2s}$ nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{s,0}$, der vollsymmetrische Spinor $a^{(-s)} \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{2s}$ nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{0,s}$, bei räumlicher Spiegelung S gilt $S a^{(+s)} = a^{(-s)}$, $S a^{(-s)} = a^{(+s)}$.

Wie bereits aus der Abzählung der Spinorkomponenten und der inneren Einstellmöglichkeiten unseres Spinteilchens geschlossen wurde, sind keine einschränkenden Nebenbedingungen vom Typ (5.6) für unsere Spinorkomponenten notwendig; dies sieht man auch auf rein formal-mathematischem Wege leicht ein, denn es gilt bei der Reduktion $\mathfrak{L}_4 \rightarrow \mathfrak{D}_3$, womit notwendig $\mathfrak{L}_4^+ \rightarrow \mathfrak{d}_3$, für unsere irreduziblen Darstellungen der \mathfrak{L}_4^+ , bzw. der \mathfrak{L}_4 :

$$\mathfrak{D}_{s,0} \oplus \mathfrak{D}_{0,s} \rightarrow \mathfrak{U}_s \oplus \mathfrak{U}_s \quad (14.4)$$

Als Wellengleichungen für das Wellenfeld kräftefreier Teilchen mit endlicher Ruhmasse und Spin s können wir mit den vollsymmetrischen Spinoren (14.3) nach (6.1) ansetzen:

$$\left. \begin{aligned} (\square - \kappa^2) a^{(+s)} \dot{\mu}_1 \dot{\mu}_2 \dots \dot{\mu}_{2s} &= 0 \\ (\square - \kappa^2) a^{(-s)} \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{2s} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.5) \text{ inv. } \mathfrak{L}_4$$

Unsere Wellengleichungen (14.5) erfüllen die Grundpostulate (A) und (B); (14.5) ist gegen Transformationen der \mathfrak{L}_4 invariant, derart, daß jede einzelne der Spinorgleichungen bezüglich \mathfrak{L}_4^+ invariant ist, während bei räumlicher Spiegelung S nach (5.2) die Rolle der beiden Spinorgleichungen vertauscht wird.

Unsere Wellengleichungen (14.5) sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung in x_1, x_2, x_3, x_4 ; aus den Transformationseigenschaften der Differentialoperatoren nach x_1, x_2, x_3, x_4 von erster Ordnung bezüglich der \mathfrak{L}_4 — sie transformieren sich nach der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}_{1/2, 1/2}$ der \mathfrak{L}_4 — einerseits und dem Transformationsverhalten unserer vollsymmetrischen Feldspinoren (14.3) bezüglich der \mathfrak{L}_4 andererseits ist es evident, daß man keinen Ansatz so treffen kann, daß sowohl die Forderung der CAPschen Hypothese erfüllt wird als auch, wie in den bisherigen Ansätzen durchwegs üblich, Differentialgleichungen von erster Ordnung in x_1, x_2, x_3, x_4 als Wellengleichungen auftreten.

Will man vorübergehend (14.5) durch ein System von Differentialgleichungen von erster Ordnung in x_1, x_2, x_3, x_4 ersetzen, das mit (14.5) äquivalent ist, etwa um die Wirkung eines äußeren elektromagnetischen Feldes mit dem Viererpotential ϕ_n auf unser Spinteilchen nach dem üblichen Verfahren durch die Substitution $\partial_n \rightarrow \tilde{d}_n = \partial_n - (ie/\hbar c) \phi_n$ zu beschreiben, dann kann man dies nach unseren allgemeinen Entwicklungen in § 6 leicht durchführen. Zu diesem Ende definieren wir als Hilfsgrößen zwei vollsymmetrische Spinoren zu den irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}_{s-1/2, 1/2}$ und $\mathfrak{D}_{1/2, s-1/2}$ der \mathfrak{A}_4^+ nach (6.10):

$$\begin{aligned} \partial_{\dot{\alpha}_K \dot{\lambda}} a^{(+s)} \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_{K-1} \dot{\alpha}_K \dot{\mu}_{K+1} \dots \dot{\mu}_{2s} &= \\ &= i_{\kappa a}^{(+s-1)} \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_{K-1} \dot{\mu}_{K+1} \dots \dot{\mu}_{2s} \\ &\quad \lambda \\ \partial_{\dot{\tau} \beta_K} a^{(-s)} v_1 \dots v_{K-1} \beta_K v_{K+1} \dots v_{2s} &= \\ &= i_{\kappa a}^{(-s+1)} \dot{\tau} v_1 \dots v_{K-1} v_{K+1} \dots v_{2s} \\ &\quad (14.6) \text{ inv. } \mathfrak{A}_4 \end{aligned}$$

für $K = 1, 2, \dots, 2s$; damit können wir nach (6.11) statt (14.5) schreiben:

$$\begin{aligned} \sum_{K=1}^{2s} \partial_{\dot{\mu}_K \dot{\lambda}} a^{(+s-1)} \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_{K-1} \dot{\mu}_{K+1} \dots \dot{\mu}_{2s} &= 2 i s_{\kappa a}^{(+s)} \dot{\mu}_1 \dots \dot{\mu}_{2s} \\ \sum_{K=1}^{2s} \partial_{\dot{\tau} \beta_K} a^{(-s+1)} \dot{\tau} v_1 \dots v_{K-1} \beta_K v_{K+1} \dots v_{2s} &= 2 i s_{\kappa a}^{(-s)} v_1 \dots v_{2s} \\ &\quad (14.7) \text{ inv. } \mathfrak{A}_4 \end{aligned}$$

Es gilt folgende Äquivalenzbeziehung: (14.5) \sim (14.6) + (14.7). Man kann aber von (14.6) + (14.7) sofort wieder zu einer Formulierung der Theorie gelangen, die der Forderung aus der CAPSchen Hypothese genügt, indem man die Hilfsgrößen $a^{(+s-1)}$ und $a^{(-s+1)}$ eliminiert; dies ist in jedem Falle möglich, auch dann, wenn man (14.6) + (14.7) abgeändert hat, etwa durch die Substitution $\partial_n \rightarrow \tilde{d}_n$, um die Wirkung eines äußeren elektromagnetischen Feldes auf unser Spinteilchen zu beschreiben; im Falle kräftefreier Spinteilchen erhält man dabei natürlich wieder unsere ursprünglichen Wellengleichungen (14.5), für Spinteilchen mit Wechselwirkung dagegen Wellengleichungen, die von (14.5) abweichen, wie etwa im Falle eines äußeren elektromagnetischen Feldes, das auf unser Spinteilchen einwirkt.

Unser Ansatz (14.5) zur Beschreibung des Wellenfeldes kräftefreier Teilchen mit Spin s ist mit allen anderen in § 6 formulierten Ansätzen zum Spinwert s äquivalent, so daß man ohne Bedenken unseren Ansatz

(14.5) als die formal einfachste und zugleich den physikalischen Gegebenheiten am besten angepaßte und daher rationellste Formulierung weiteren Untersuchungen über Spinwellenfelder zugrunde legen kann.

§ 15. Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

In der vorliegenden Arbeit wurden unter möglichst allgemeinem Gesichtspunkt lineare Spinwellengleichungen für kräftefreie Teilchen mit endlicher Ruhmasse und mit beliebigem halbganzen Spin formuliert und diskutiert; die einzigen einschränkenden Voraussetzungen, die getroffen wurden, waren die Invarianz der Theorie gegen die Transformationen der vollen LORENTZ-Gruppe und die Gültigkeit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung, eingekleidet in die quantentheoretische Formulierung der Gültigkeit der KLEIN-SCHRÖDINGER-GORDON-Gleichung für alle Komponenten der Wellenfunktion; diese Voraussetzungen werden durch experimentell gut bestätigte, physikalische Gegebenheiten und Gesetze nahegelegt, so daß sie fast trivial erscheinen könnten, was aber keineswegs der Fall ist.

Bei unseren Untersuchungen fanden wir eine Reihe mathematisch äquivalenter Beschreibungen für das Spinwellenfeld ein und desselben kräftefreien Teilchens mit Spin s ; alle diese möglichen Beschreibungen führen wegen ihrer Äquivalenz natürlich zu denselben Ergebnissen für meßbare Größen, so daß eine Auswahl unter diesen Ansätzen durch Vergleich mit Messungsergebnissen für kräftefreie Teilchen grundsätzlich unmöglich ist. Ein plausibles Prinzip, unter den möglichen Ansätzen eine Auswahl zu treffen, die einen speziellen Ansatz für jeden halbganzen Spinwert s vor allen anderen auszeichnet, ist in § 14 dargelegt; es wird dabei derjenige Ansatz ausgesondert, der die formal einfachste und rationellste Beschreibung des Spinwellenfeldes darstellt und der zugleich den physikalischen Gegebenheiten am besten angepaßt erscheint; man erreicht dieses Ziel dadurch, daß man die Zahl der unabhängigen Feldgrößen, die das Spinwellenfeld eindeutig festlegen, mit der Zahl der inneren Einstellmöglichkeiten des Spinteilchens übereinstimmen läßt; dadurch werden zusätzliche Nebenbedingungen vermieden, die überzählige mathematische Freiheiten der Beschreibung kompensieren und die Beschreibung des Spinwellenfeldes nur unübersichtlicher und komplizierter machen.

Durch Vergleich mit bisher untersuchten Ansätzen zur Beschreibung von Spinwellenfeldern fanden wir Theorien, bei denen durch eine Zusatzbedingung a priori über das Transformationsverhalten der Feldgrößen bei räumlicher Spiegelung verfügt wurde, während es in unseren allgemeineren Formulierungen noch frei verfügbar bleibt; durch diese Zusatzbedingung wird aber die Allgemeinheit des Ansatzes beeinträchtigt und man verliert damit mögliche Ansätze zur Beschreibung von Spinwellenfeldern, die mit unseren plausiblen, physikalisch vernünftigen Grundforderungen an die Theorie nach § 1 durchaus verträglich wären; durch unsere allgemeinere Formulierung, bei der keine einschränkenden

Voraussetzungen über das Transformationsverhalten der Feldgrößen unseres Spinwellenfeldes bei räumlicher Spiegelung durch Zusatzbedingungen a priori eingeführt sind, läßt die Möglichkeit offen, nachträglich so durch geeignete Zusatzbedingungen über das Spiegelungsverhalten der Feldgrößen zu verfügen, wenn es sich als notwendig erweisen sollte, daß die Folgerungen der Theorie die Ergebnisse der Experimente vielleicht besser wiedergeben, falls die dem Spinwellenfeld entsprechenden Spinteilchen in der Natur wirklich auftreten. Man läuft durch die übereilte Einführung einschränkender Zusatzbedingungen Gefahr, sich den Zugang zu Formulierungen möglicher Theorien von Spinwellenfeldern und Spinteilchen zu verbauen, zu Theorien, die vielleicht in der Natur als Spinwellenfelder oder als Spinteilchen realisiert sind.

Der gegen eine Anzahl bislang diskutierter Theorien für Spinwellenfelder und Spinteilchen erhobene Einwand zu geringer Allgemeinheit gegenüber unseren Ansätzen ohne einschränkende Zusatzbedingungen wird noch erhärtet, wenn man die Erweiterung der möglichen Theorien vom kräftefreien Fall, wo unsere Ansätze alle äquivalent sind, auf den Fall betrachtet, daß unsere Spinteilchen miteinander wechselwirken oder unter dem Einfluß äußerer Kräfte stehen, etwa elektrisch geladene Spinteilchen unter der Einwirkung eines äußeren elektromagnetischen Feldes. Gerade bei den Theorien der Spinteilchen, wo irgendwelche Kräfte auf die Spinteilchen einwirken, machen sich Unterschiede zwischen Ansätzen, die im kräftefreien Fall äquivalent sind, bemerkbar und auch der Spiegelungscharakter der Feldgrößen, die das Wellenfeld des betrachteten Spinteilchens beschreiben, kann von wesentlichem Einfluß auf das Ergebnis bei der Berechnung meßbarer Größen sein, von so großem Einfluß sogar, daß bei unpassend eingeführten Zusatzbedingungen, die über den Spiegelungscharakter der Feldgrößen verfügen, physikalisch unverständliche, auch divergente Ausdrücke für meßbare endliche Größen auftreten, während der Ansatz nach der CAPSchen Hypothese zu endlichen, physikalisch sinnvollen und verständlichen Werten führt.

Zur besseren Darstellung der Unterschiede zwischen möglichen Ansätzen für Spinwellenfelder nicht kräftefreier Spinteilchen seien bereits veröffentlichte Ergebnisse angeführt für den Fall, daß ein äußeres elektromagnetisches Feld auf unsere elektrisch geladenen Spinteilchen einwirkt. Es ist in der Quantentheorie üblich, wie es die LAGRANGE-HAMILTONsche Formulierung der Bewegungsgleichungen für elektrisch geladene Teilchen unter der Einwirkung eines äußeren elektromagnetischen Feldes nach der klassischen Elektrodynamik nahelegt, den Einfluß des äußeren elektromagnetischen Feldes mit dem Viererpotential ϕ_n auf das Wellenfeld des elektrisch geladenen Spinteilchens dadurch zu berücksichtigen, daß man in den Wellengleichungen des kräftefreien Spinteilchens die Substitution $\partial_n \rightarrow \bar{\partial}_n = \partial_n - (i e / \hbar c) \phi_n$ einführt, wobei allerdings die Wellengleichungen des kräftefreien Spinteilchens im allgemeinen von erster Ordnung in den Ableitungen nach x_1, x_2, x_3, x_4

sein müssen, um für den Fall mit endlichen äußeren Kräften physikalisch vernünftige Wellengleichungen zu erhalten, was ja verständlich ist, wenn man beachtet, daß gerade dann die Wellengleichungen auf die Form der LAGRANGE-HAMILTON-JACOBISCHEN Mechanik gebracht sind, nämlich $\partial\Psi/\partial t = i\hbar^{-1}H\Psi$, wo H der der klassischen HAMILTON-Funktion in der Quantentheorie entsprechende HAMILTON-Operator ist, der wegen der relativistischen Invarianz der Wellengleichungen in den Ableitungen nach x_1, x_2, x_3 notwendig gerade von erster Ordnung sein muß. Dieses Verfahren wurde in der Quantentheorie mit großem Erfolg angewandt, es sei aber erwähnt, daß man eine Kopplung zwischen einem äußeren elektromagnetischen Feld und dem Wellenfeld eines elektrisch geladenen Spinteilchens auch noch in anderer Weise relativistisch kovariant und eichinvariant ansetzen könnte; die Eigenschaften der relativistischen Kovarianz und der Eichinvarianz sind bei der üblichen Substitution $\partial_n \rightarrow d_n$ erfüllt, wie es aus physikalischen Gründen notwendig sein muß. Will man nun ein Spin s -Wellenfeld, wie es etwa durch unsere Wellengleichungen (6.10) + (6.11) beschrieben wird, in relativistisch kovarianter und eichinvarianter Weise durch die übliche Substitution $\partial_n \rightarrow d_n$ mit einem äußeren elektromagnetischen Feld koppeln, dann zeigt es sich, daß in allen Fällen $Q \neq s$ Systeme von Wellengleichungen entstehen, die innere Widersprüche aufweisen und daher miteinander nicht verträglich sind; sie müssen erst durch die Einführung von Hilfsfeldern zu den Spinwerten $s - 1, s - 2, \dots, \begin{cases} 1/2 & \text{für } 2s \equiv 1(2) \\ 0 & \text{für } 2s \equiv 0(2) \end{cases}$ adaptiert werden, was unbefriedigend und sicher im allgemeinen nicht eindeutig ist. Die im kräftefreien Fall bestehende Äquivalenz aller Ansätze unabhängig vom Wert des Parameters Q wird durch die Substitution $\partial_n \rightarrow d_n$ aufgehoben. Der pathologische Fall inkompatibler Wellengleichungen kann erst für Spinwerte $s \geq 3/2$ auftreten, weil für $s = 1/2$ und $s = 1$ nach (6.10) + (6.11) nur die einzig möglichen Formulierungen mit $Q = s$ auftreten, der Fall $Q \neq s$ ist nicht möglich; die Verhältnisse im Fall $s = 0$, der nicht von unserem Schema (6.10) + (6.11) erfaßt wird, sind in der Literatur so erschöpfend diskutiert, daß es sich erübrigt, hier näher darauf einzugehen. Der interessante Fall sind unsere Spinwellengleichungen (6.10) + (6.11) für $Q = s \neq 0$; in diesem Falle werden (6.10) + (6.11) mit (14.6) + (14.7) identisch, so daß man eine Theorie erhält, die sich auf eine der CARPSEN Hypothese genügende Form bringen läßt, wenn man das in § 14 erläuterte Verfahren der Elimination von $a^{(+s-1)}$ und $a^{(-s+1)}$ durchführt, nachdem man die Wirkung des äußeren elektromagnetischen Feldes durch die übliche Substitution $\partial_n \rightarrow d_n$ berücksichtigt hat; führt man die Substitution $\partial_n \rightarrow d_n$ in (14.6) + (14.7) ein, dann erhält man unmittelbar ein in sich widerspruchsfreies System von Spinwellengleichungen, so daß sich der Kunstgriff, Hilfsfelder wie in den Fällen $Q \neq s$ einzuführen, erübrigt. Neben den in § 14 bereits erwähnten Argumenten für den der CARPSEN Hypothese genügenden Ansatz (14.5) \sim (14.6) + (14.7), nämlich die einfachste, den physikalischen Verhältnissen am besten entsprechende,

rationellste Beschreibung eines Spin s -Wellenfeldes zu sein, sind die erwähnten Verhältnisse ein gewichtiger Hinweis darauf, daß der in § 14 vorgeschlagene Ansatz (14.5) \sim (14.6) + (14.7) für das Wellenfeld eines Spinteilchens physikalisch sinnvoll ist; es liegt die Vermutung nahe, daß (14.5) \sim (14.6) + (14.7) die richtige Beschreibung eines Spinteilchens vom Spin s darstellt, falls es derartige Teilchen in der Natur überhaupt gibt, was ja für Spinwerte $s \geq 1$ eine noch völlig offene Frage ist. Jedenfalls dürfte es sinnvoll und lohnend sein, die weiteren Folgerungen aus dem CAP-DONNERTSchen Ansatz zu untersuchen und zu diskutieren; man kann hoffen, dabei physikalisch sinnvolle Werte für meßbare Größen zu erhalten, sinnvollere Werte, als man aus den bisher benützten Ansätzen erhielt, die allenfalls eine experimentelle Nachprüfung erlauben, was natürlich die einzige sichere Bestätigung für die Richtigkeit der vorgeschlagenen Theorie liefern kann; man kann weiterhin hoffen, daß die experimentelle Überprüfung der berechneten Meßwerte die bedeutsame Frage nach dem Spin eines Teilchens sicher zu beantworten gestattet, während man bisher nur indirekte Aufschlüsse darüber hat, etwa aus Kernreaktionen oder anderen Elementarprozessen. Schließlich ist zu vermuten, daß bei der weiteren Untersuchung der von CAP und Verfasser vorgeschlagenen, in § 14 erläuterten Theorie der Spinwellenfelder und Spinteilchen geringere Divergenzschwierigkeiten auftreten als etwa in der vektoriellen und pseudovektoriellen Mesonentheorie zum Spin 1, so daß man vielleicht eine renormierbare Theorie für elektrisch geladene Spin-1-Teilchen formulieren kann, im Gegensatz zu den nicht renormierbaren vektoriellen und pseudovektoriellen Theorien. Als Hinweis auf diese vermutete Eigenschaft der von CAP und Verfasser vorgeschlagenen Theorie sei folgendes, bereits veröffentlichtes Ergebnis erwähnt: Betrachtet man die Streuung elektrisch geladener Spinteilchen an einem statischen COULOMB-Feld, also einem elektromagnetischen Feld $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$, $\phi_4 = i V(r) = i e Z/r$, wo $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, dann erhält man aus dem Ansatz (14.6) + (14.7) \sim (14.5) nach der Substitution $\partial_n \rightarrow d_n$ für die Streuintensität bei elastischer Streuung in großer Entfernung vom Streuzentrum als erste BORNSche Näherung eine relativistisch korrigierte RUTHERFORD-Formel mit einem Spinfaktor:

$$I(s, \beta, \vartheta) = \frac{I_0}{R^2} \left(\frac{Z e^2}{2 m c^2} \right)^2 \frac{1 - \beta^2}{\beta^4 \sin^4(\vartheta/2)} f(s, \beta, \vartheta) \quad (15.1)$$

(siehe [9], [21]), mit dem Spinfaktor

$$f(s, \beta, \vartheta) = 1 - \frac{s+1}{3s} \beta^2 \sin^2(\vartheta/2) \quad \text{für} \quad s \neq 0 \quad (15.2)$$

(siehe [9], [21]), wobei I_0 = Primärintensität, R = Entfernung Beobachter-Streuzentrum, $\beta c = v$ = Geschwindigkeit der Teilchen und ϑ = Streuwinkel gegen die Primärrichtung. Im Grenzfall hoher Teilchengeschwindigkeiten, i.e. $\beta \rightarrow 1$, wird

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} I(s, \beta, \vartheta) = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta \neq 0 \quad (15.3)$$

wie es aus Gründen der klassischen Physik und der Relativitätsmechanik vernünftigerweise zu erwarten ist, daß nämlich Teilchen, die mit Lichtgeschwindigkeit in das COULOMB-Feld eintreten, um endliche Winkel nicht gestreut werden; dabei muß natürlich der Grenzübergang von Geschwindigkeiten $v < c$ stetig erfolgen, was hier erfüllt ist. Anders dagegen, wenn man von der vektoriellen Theorie zum Spin 1 ausgeht! LAPORTE [65], MASSEY und CORBEN [66] sowie GUNN [67] berechneten für denselben Prozeß einen Spinfaktor zur relativistisch korrigierten RUTHERFORD-Formel

$$f'(1, \beta, \vartheta) = 1 + \frac{1}{6} \frac{\beta^4}{1 - \beta^2} \sin^2 \vartheta \quad (15.4)$$

(siehe auch [68] und [21]), woraus im Grenzfall hoher Teilchengeschwindigkeiten das höchst merkwürdige, physikalisch unverständliche Ergebnis folgt:

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} I'(s, \beta, \vartheta) = (2/3) \frac{I_0}{R^2} \left(\frac{Z e^2}{2 m c^2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 (\vartheta/2) \neq 0 \quad \text{für} \quad \vartheta \neq \pi \quad (15.5)$$

Wie ist dieses befremdliche Ergebnis zu erklären? Die Vermutung von CORBEN und SCHWINGER [69], es liege an der Beschränkung auf die erste BORNSche Näherung, ist nicht stichhaltig, denn SAUTER ([70], [71]) fand aus der DIRAC-Gleichung in erster BORNScher Näherung denselben Wert für den Spinfaktor von Spin 1/2-Teilchen wie MOTT [72] durch strenge Berechnung und der Verfasser ([9], [21]) nach oben zitierter Formel aus der DIRAC-Gleichung zweiter Ordnung in erster BORNScher Näherung, nämlich

$$f(1/2, \beta, \vartheta) = 1 - \beta^2 \sin^2 (\vartheta/2) \quad (15.6)$$

Daher ist zu vermuten, daß die PROCASchen Wellengleichungen für vektorielle Spin 1-Teilchen unzutreffend sind und durch geeignetere Wellen-Gleichungen für Spin 1-Teilchen zu ersetzen wären, etwa durch die von CAP und Verfasser vorgeschlagenen Wellengleichungen vom Typ (14.5) \sim (14.6) + (14.7), die mit (7.2) \sim (7.11) identisch sind. Daher sind auch die Divergenzschwierigkeiten in der neu vorgeschlagenen Theorie nach CAP und Verfasser geringer zu bewerten, als die in der vektoriellen und pseudovektoriellen Theorie nach PROCA und KEMMER; denn das unverständliche Ergebnis bei der COULOMB-Streuung entsteht durch das divergente Verhalten von $\lim_{\beta \rightarrow 1} f'(1, \beta, \vartheta)$, das in der neu vorgeschlagenen Theorie wegfällt, d. h., $\lim_{\beta \rightarrow 1} f(1, \beta, \vartheta)$ ist nicht divergent.

Herrn Prof. Dr. H. HÖNL, Freiburg (Breisgau), danke ich herzlichst für sein reges, förderndes Interesse und für wertvolle, anregende Diskussionen; weiterhin möchte ich Herrn Doz. Dr. H. SALECKER, Stuttgart, für wertvolle und interessante Diskussionen herzlichst danken.

Weiterer Dank gebührt dem Kultministerium des Landes Baden-Württemberg in Stuttgart, das durch finanzielle Hilfe die Durchführung folgender Arbeit ermöglichte.

Literatur

Siehe Teil I zu vorliegender Arbeit, Acta Phys. Austr. **11**, 321 (1957).

Anmerkungen

¹ \tilde{U} geht aus U dadurch hervor, daß man U transponiert, das heißt an der Hauptdiagonale spiegelt, und davon den konjugiert komplexen Wert nimmt.

² Man erhält ohne viel zu rechnen die Wellengleichungen (13.29), wenn man entsprechend der Vorschrift (13.25) die Gln. (13.7) und (13.10) addiert und, wie es (13.25) verlangt, ansetzt:

$$\begin{aligned} v^{(+1)} \dot{\mu} \dot{\tau} &= w^{(+1)} \dot{\mu} \dot{\tau} = u^{(+1)} \dot{\mu} \dot{\tau}, & v^{(+0)} \dot{\tau} &= w^{(-0)} \dot{\tau} = u^{(+0)} \dot{\tau}, \\ v^{(-1)} \dot{\nu} \dot{\lambda} &= w^{(-1)} \dot{\nu} \dot{\lambda} = u^{(-1)} \dot{\nu} \dot{\lambda}, & v^{(-0)} \dot{\tau} &= w^{(+0)} \dot{\tau} = u^{(-0)} \dot{\tau}. \end{aligned}$$

³ Man erhält ohne viel zu rechnen die Wellengleichungen (13.46), wenn man entsprechend der Vorschrift (13.26) die Gln. (13.7) und (13.10) in geeigneter Weise addiert oder subtrahiert und, wie es (13.26) verlangt, ansetzt:

$$\begin{aligned} v^{(+1)} \dot{\mu} \dot{\tau} &= w^{(+1)} \dot{\mu} \dot{\tau} = z^{(+1)} \dot{\mu} \dot{\tau}, & + v^{(+0)} \dot{\tau} &= -w^{(-0)} \dot{\tau} = z^{(+0)} \dot{\tau}, \\ v^{(-1)} \dot{\nu} \dot{\lambda} &= w^{(-1)} \dot{\nu} \dot{\lambda} = z^{(-1)} \dot{\nu} \dot{\lambda}, & + v^{(-0)} \dot{\tau} &= -w^{(+0)} \dot{\tau} = z^{(-0)} \dot{\tau}. \end{aligned}$$

Einige Bemerkungen zum Uhrenparadox

Von

Otto Bergmann

Abteilung für Physik der Universität in Neu England, Armidale, N.S.W. Australien

(Eingegangen am 21. Mai 1957)

Zusammenfassung

In der Einführung zu dieser Arbeit wird das Problem des Zeitunterschiedes zweier Uhren, die zweimal in ihrer Geschichte räumlich koinzidieren, kurz im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie behandelt. Im nächsten Abschnitt werden unendlich kleine Schwingungen in einem geodätischen Koordinatensystem im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie untersucht und der Zeitunterschied einer im Ursprung ruhenden Uhr und einer Uhr, die diese Schwingungen ausführt, berechnet. Im folgenden Abschnitt wird dasselbe Problem für eine elektrisch geladene Uhr betrachtet, wobei außer dem Gravitationsfeld ein konstantes magnetisches Feld angenommen wird. Zum Abschluß wird eine mögliche und bisher nicht beachtete Definition einer idealen elektrisch geladenen Uhr kurz untersucht.

1. Der Problemkreis in der speziellen Relativitätstheorie

Eine punktförmige Uhr kann mathematisch durch eine zeitförmige Weltlinie beschrieben werden, deren Punkte durch Parameterwerte unterschieden werden, die direkt die Zeigerstellung der Uhr angeben. Natürlich ist dann diese Parametrisation vor jeder anderen ausgezeichnet. Eine Uhr, die in ihrem Ruhssystem direkt die vier-dimensionale Weltstrecke mißt, nennen wir eine ideale Uhr. Auf Grund der LORENTZ-Invarianz erhält man dann unmittelbar den Zeitablauf einer gleichmäßig bewegten Uhr, die bekanntlich gegenüber einer ruhenden nachläuft: die Zeitdilatation. Natürlich sind zu diesem Vergleich mindestens zwei ruhende Uhren erforderlich, die mittels Lichtsignalen, deren Geschwindigkeit den bekannten universellen Wert haben, synchronisiert wurden. Es besteht aber gar kein Grund, diese Betrachtungen auf gleichförmig bewegte Uhren einzuschränken. Allein die Tatsache, daß es eine widerspruchsfreie relativistische Dynamik gibt, obgleich sie nicht alle Erfahrungen zu beschreiben gestattet, zwingt uns, beschleunigte Partikel und Uhren in Betracht zu ziehen. Die willkürliche Bahn einer Uhr kann man sich aber aus den Sektoren der Bahnen von unendlich vielen, gleichförmig bewegten Uhren zusammengesetzt denken, von denen die n -te dieselbe Zeigerstellung wie die $(n + 1)$ -te hat,

wenn beide Uhren räumlich koinzidieren. Der mögliche Effekt der Beschleunigung ist dann begrifflich ausgeschaltet. Eine ideale Uhr im beschleunigten Zustand wird man natürlich in diesem Sinne definieren. Schreiben wir den Bewegungszustand in einer willkürlichen Parameterdarstellung $X^\alpha(\tau)$ ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), so wird der Zeitablauf zwischen zwei Punkten $X^\alpha(\tau_1)$ und $X^\alpha(\tau_2)$ mit den respektiven Zeigerstellungen s_1 und s_2 durch

$$s_1 - s_2 = \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau (g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta)^{1/2} \quad (1)$$

gegeben. In der letzten Gleichung bedeuten $\dot{X}^\alpha = dX^\alpha/d\tau$ und $g_{\alpha\beta}$ ist hier die galileische Metrik, die wir künftighin mit $\delta_{\alpha\beta}$ bezeichnen wollen ($\delta_{00} = -\delta_{11} = -\delta_{22} = -\delta_{33} = 1$). Charakteristisch für diese Definition einer idealen Uhr ist, daß ihre Periode unabhängig von ihrer Geschichte ist.

Man kann natürlich auch andere Koordinatensysteme einführen, zum Beispiel ein solches, in dem die Uhr dauernd ruht. Da man schon seit langem in physikalischen Problemen mit Koordinatensystemen operiert, in denen die CHRISTOFFEL-Klammern nicht verschwinden, zum Beispiel Polarkoordinaten, obwohl der Raum als eben vorausgesetzt wird, dürfte es schwer sein, irgendwelche Argumente gegen den Gebrauch beliebiger Koordinatensysteme in der speziellen Relativitätstheorie vorzubringen. Man muß dann natürlich den metrischen Tensor des neuen Koordinatensystems in (1) einsetzen und die Weltlinienfunktionen $X^\alpha(\tau)$ in das neue Koordinatensystem umrechnen.

Da der Wert des Integrals (1) für gegebene Endpunkte von der tatsächlichen Bahn längs der die Uhr wandert abhängt, wird die Zeigerstellung der Uhr im Endpunkt doch von ihrer Geschichte abhängen, nicht aber ihre Periode, und zwei Uhren die einen gemeinsamen Anfangspunkt in verschiedener Richtung oder mit verschiedenen Geschwindigkeiten verlassen, werden im allgemeinen verschiedene Zeiten bei ihrem Wiedertreffen anzeigen. Der gemessene Zeitablauf beider Uhren und daher auch der Unterschied der Zeitabläufe wird aber unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sein.

Auch wenn man also an ein „absolutes Raum-Zeit-Kontinuum“ im Sinne der speziellen Relativitätstheorie glaubt, wird man annehmen müssen, daß die charakteristische Periode eines Atoms, das bekanntlich eine ideale Uhr darstellt, verschieden ist, je nachdem ob das Atom mit der Sonne oder mit der Erde ruht. Bezeichnen wir diese Größen mit ΔT_{Sonne} und ΔT_{Erde} , beziehungsweise und nehmen wir für die Erdbahn eine kreisförmige Bahn mit Radius ϱ und Winkelgeschwindigkeit ω an, so erhalten wir

$$\Delta T_{\text{Erde}} = \Delta T_{\text{Sonne}} (1 - \varrho^2 \omega^2)^{1/2} \quad (2)$$

Der numerische Wert des zweiten Ausdruckes unter der Quadratwurzel ist ungefähr 10^{-8} und daher praktisch vernachlässigbar. Wir

haben dabei vorausgesetzt, daß die Sonne in dem „absoluten Raum-Zeit-Kontinuum“ ruht oder sich in gleichförmiger Bewegung befindet. Das Ruhssystem der Erde ist dann kein Inertialsystem und die Lichtgeschwindigkeit wird nicht den universellen Wert haben. Wir können daher auch nicht von den Perioden in (2) auf die Wellenlängen nach der Formel $\lambda\nu = 1$ schließen, da diese Beziehung wohl in dem Ruhssystem der Sonne, nicht aber in dem Ruhssystem der Erde gilt. Natürlich sind diese Abweichungen von den, aus den NEWTONschen Begriffen des Raum-Zeit-Kontinuums abgeleiteten Gleichungen äußerst klein und außerdem wohl bekannt. Wir wollen uns daher mit diesen Problemen nicht weiter beschäftigen und im nächsten Abschnitt unendlich kleine Schwingungen in der allgemeinen Relativitätstheorie betrachten.

2. Unendlich kleine Schwingungen in der allgemeinen Relativitätstheorie

In der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Äquivalenz aller Koordinatensysteme angenommen. Der angezeigte Zeitablauf einer idealen Uhr wird wieder durch das invariante Integral (1) gegeben, aber der metrische Tensor kann nicht mehr willkürlich auf den galileischen Tensor reduziert werden, sondern muß aus den EINSTEINSchen Gleichungen

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R^\alpha_\alpha = - T_{\alpha\beta} \quad (3)$$

berechnet werden. Während wir im vorigen Abschnitt beliebige Bewegungszustände von Uhren betrachteten, wollen wir hier annehmen, daß die idealen Uhren wie neutrale Massenpartikel geodätische Weltlinien besitzen, das heißt, daß die Größe s in (1) einen stationären Wert für die tatsächliche Bahn annimmt.

Man kann leicht sehen, daß es möglich ist, daß zwei geodätische Linien sich zweimal überschneiden und daß die Entfernung längs der beiden Linien zwischen den Überschneidungspunkten für beide Uhren verschieden ist. Da aber diese Entfernungen invariant sind, spielt die Wahl des Koordinatensystems keine Rolle und die Bezeichnung „Uhrenparadox“ ist daher auch ungerechtfertigt. Damit ist aber das Problem noch nicht gelöst, da man gerne den Zusammenhang zwischen dem Zeitunterschied der beiden Uhren und den geometrischen Eigenschaften des Raumes oder den Eigenschaften der physikalischen Systeme, die die Geometrie bestimmen, kennen möchte. Dieses Problem kann natürlich nicht in allgemeiner Form gelöst werden; ein einfacher Fall aber, die unendlich kleinen Schwingungen einer Uhr in der Umgebung eines Punktes, in dem ein lokales geodätisches Koordinatensystem eingeführt wurde, läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen leicht lösen. Wir wollen uns nun diesem Problem zuwenden.

Bekanntlich kann man immer geeignete Transformationen finden, so daß der metrische Tensor in einem Punkt die Entwicklung

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta, \mu\nu} X^\mu X^\nu + \dots \quad (4)$$

zuläßt, worin $\delta_{\alpha\beta}$ die schon erwähnte galileische Metrik darstellt. Wir wollen außerdem den Ursprung des Koordinatensystems in diesen ausgezeichneten Punkt legen. Die CHRISTOFFEL-Klammern besitzen dann die Entwicklung

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta, \nu\kappa} + g_{\nu\beta, \mu\kappa} - g_{\mu\nu, \beta\kappa}) X^\kappa + \dots \quad (5)$$

und der Krümmungstensor

$$B^\alpha_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} (g_{\nu\beta, \mu\lambda} - g_{\mu\nu, \beta\lambda} - g_{\lambda\beta, \mu\nu} + g_{\mu\lambda, \beta\nu}) + \dots \quad (6)$$

aus dem man leicht den RIEMANNSchen Tensor ableiten kann

$$R_{\beta\mu\nu\lambda} = \delta_{\alpha\beta} B^\alpha_{\mu\nu\lambda} + \dots \quad (7)$$

Dieser Tensor ist schiefssymmetrisch sowohl in den ersten beiden Indizes $\beta\mu$ als auch in den letzten $\nu\lambda$ und bleibt außerdem ungeändert bei einer zyklischen Vertauschung der drei Indizes μ, ν, λ . Der RICCI-Tensor

$$R_{\alpha\beta} = B^\lambda_{\alpha\lambda\beta} = \delta^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} \quad (8)$$

ist daher symmetrisch.

Wenn wir nun ein neues Koordinatensystem $X^{\alpha'}$ durch

$$X^{\alpha'} = X^\alpha + \frac{1}{6} C^\alpha_{\mu\nu\lambda} X^\mu X^\nu X^\lambda + \dots \quad (9)$$

eingeführen, so können wir mit geeignet gewählten $C^\alpha_{\mu\nu\lambda}$ die obigen Entwicklungen noch wesentlich vereinfachen. Man sieht sofort, daß uns 80 unabhängige Koeffizienten zur Verfügung stehen.

Außerdem können wir noch eine, von sechs unabhängigen Parametern abhängige LORENTZ-Transformation

$$\begin{aligned} X^{\alpha''} &= D^\alpha_{\beta} X^{\beta'} \\ \delta_{\alpha\beta} D^\alpha_{\mu} D^\beta_{\nu} &= \delta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (10)$$

ausführen. Beide Transformationen (9) und (10) lassen den galileischen und geodätischen Charakter des lokalen Koordinatensystems unberührt, das heißt, daß auch nach Ausführung dieser Transformationen der führende Term in (4) durch $\delta_{\alpha\beta}$ gegeben sein wird und keine linearen Terme in X^α auftreten werden.

Der metrische Tensor lautet nach Ausführung der Transformation (9)

$$g'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta, \mu\nu} - C_{\alpha\mu\nu\beta} - C_{\beta\mu\nu\alpha}) X^{\mu'} X^{\nu'} \quad (11)$$

wobei die zu (9) inverse Transformation

$$X^\alpha = X^{\alpha'} - \frac{1}{6} C^\alpha_{\mu\nu\lambda} X^{\mu'} X^{\nu'} X^{\lambda'} + \dots \quad (12)$$

benützt wurde und die Größen $C_{\alpha\mu\nu\beta}$ durch

$$C_{\alpha\mu\nu\beta} = \delta_{\alpha\lambda} C^\lambda_{\mu\nu\beta} \quad (13)$$

definiert sind. Für die CHRISTOFFEL-Klammern folgt

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}' = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta, \nu\lambda} + g_{\nu\beta, \mu\lambda} - g_{\mu\nu, \beta\lambda} - 2 C_{\beta\mu\nu\lambda}) X^{\lambda'} \quad (14)$$

während die Gleichung (6) von der Transformation (9) nicht betroffen wird.

Man kann sich die Willkür der Koeffizienten $C^{\alpha}_{\mu\nu\lambda}$ in verschiedener Weise zu Nutze machen. Für unsere Zwecke ist es am vorteilhaftesten, diese Größen so zu wählen, daß die Komponenten des metrischen Tensors und der CHRISTOFFEL-Klammern in der gewählten Näherung unabhängig von der Zeit X^0 werden. Wir wählen zu diesem Zweck

$$C_{\alpha\mu\nu\sigma} = -\frac{1}{2} (g_{\mu\nu, \alpha\sigma} - g_{\alpha\mu, \nu\sigma} - g_{\alpha\nu, \mu\sigma}) \quad (15)$$

das sind die 40 Koeffizienten, in denen mindestens einer der drei Indizes $\mu\nu\lambda$ in (9) den Wert Null hat. Man überzeugt sich, daß die 40 Gleichungen unabhängig sind und daher keine Nebenbedingungen für die $g_{\alpha\beta, \mu\nu}$ enthalten. Die Wahl (15) kann also für jeden RIEMANNschen Tensor getroffen werden. Man beweist sehr einfach, daß die Komponenten des metrischen Tensors tatsächlich zeitunabhängig werden und findet besonders

$$g'_{00} = 1 + R_{onom} X^{n'} X^{m'} + \dots \quad (16)$$

worin die lateinischen Indizes die Werte 1, 2, 3 annehmen können. Da wir im folgenden nur dieses zeitunabhängige Koordinatensystem benutzen wollen, werden wir in Zukunft die Striche, die wir zur Unterscheidung der Tensorkomponenten in dem neuen Koordinatensystem einführen, weglassen.

Die Bewegung einer Partikel errechnet sich aus dem Integralprinzip

$$\delta \int d\tau m (g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta)^{1/2} = 0 \quad (17)$$

worin wir für $g_{\alpha\beta}$ den Wert (11) mit (15) einzusetzen haben. Die Konstante m bedeutet die Masse der Partikel.

Da der Integrand in (17) unabhängig von X^0 ist, lautet eine EULER-LAGRANGE-Gleichung

$$m g_{0\alpha} \dot{X}^\alpha (g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu)^{-1/2} = \text{const.} = \eta \quad (18)$$

und wenn wir den Parameter so wählen, daß

$$g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = 1 \quad (19)$$

gilt, wofür wir dann s an Stelle von τ schreiben, was in Übereinstimmung mit der Bezeichnung in (1) ist, erhalten wir für (18)

$$m g_{0\alpha} \dot{X}^\alpha = \eta. \quad (20)$$

Aus den beiden Gleichungen (19) und (20) folgen zwei Gleichungen für \dot{X}^0

$$\dot{X}^0 = g_{00}^{-1} (\eta/m - g_{0n} \dot{X}^n) = (1 - g_{nm} \dot{X}^n \dot{X}^m) (\eta/m + g_{0n} \dot{X}^n)^{-1} \quad (21)$$

und daraus der „Energiesatz“

$$(g_{00} g_{nm} - g_{0n} g_{0m}) \dot{X}^n \dot{X}^m = g_{00} - (\eta/m)^2 \quad (22)$$

worin wir jedenfalls den zweiten Ausdruck der linken Seite vernachlässigen können, da er von vierter Ordnung in den Koordinaten ist.

$$g_{nm} \dot{X}^n \dot{X}^m = 1 - (\eta/m)^2 \cdot g_{00}^{-1} \quad (23)$$

Abgesehen von der Vernachlässigung dritter und höherer Potenzen von X^α waren unsere Betrachtungen noch allgemein und exakt. Wir wollen nun aber auch Glieder der Form $X^n X^m \dot{X}^p$ vernachlässigen. Der Gültigkeitsbereich dieser Näherung soll später untersucht werden. Gl. (17) lautet nun

$$\delta \int ds m [g_{00} \dot{X}^0{}^2 + \delta_{nm} \dot{X}^n \dot{X}^m]^{1/2} = 0 \quad (24)$$

und die Bedingung (23)

$$(\eta/m)^2 \cdot g_{00}^{-1} - 1 - \delta_{nm} \dot{X}^n \dot{X}^m \quad (25)$$

Wegen (21) und (25) ist der Integrand in (24) gleich eins, wie es natürlich bei Wahl der Eigenzeit als Parameter sein muß. Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen nehmen nun eine sehr einfache Form an. Mit (16) findet man

$$\ddot{X}^n - (\eta/m)^2 \cdot \delta^{np} R_{opom} X^m = 0 \quad (26)$$

wegen der Symmetrie $R_{onom} = R_{omon}$.

Wir wollen nun eine spezielle Transformation der Form (10) anwenden, nämlich eine drei-dimensionale Drehung, deren Koeffizienten so gewählt werden, daß die Tensorkomponenten R_{omon} Diagonalform annehmen. Wir schreiben

$$R_{onom} = -\delta_{nm} R_{(n)} \quad (27)$$

Wir wollen annehmen, daß wenigstens einer der drei Werte $R_{(n)}$ positiv ist und betrachten eine lineare Bewegung in der Richtung der Koordinate mit positivem $R_{(n)}$. Wir wollen den ausgezeichneten Tensorindex in den folgenden Gleichungen weglassen. Diese Bewegung ist dann durch

$$X = C \sin \eta/m \cdot \sqrt{R} \cdot s \quad (28)$$

gegeben, worin eine Phasenkonstante willkürlich Null gesetzt wurde. Setzen wir diese Lösung in (21) ein, so finden wir eine Beziehung zwischen dem Zeitablauf einer im Ursprung ruhenden Uhr und einer Uhr, die die oben erwähnten Schwingungen mitmacht. In unserer Näherung lautet (21)

$$\dot{X}^0 = \eta/m \cdot (1 - R X^2) \quad (29)$$

und für den betrachteten Bewegungstyp (28) ergibt sich dann

$$X^0 = \left(1 - \frac{1}{2} R C^2\right) \eta s/m + \frac{1}{4} C^2 \sqrt{R} \sin 2 \eta/m \cdot \sqrt{R} \cdot s \quad (30)$$

worin wir angenommen haben, daß beide Uhren übereinstimmen, wenn $X^0 = 0$. Wenn die schwingende Uhr zum erstenmale für positives X^0 zum Ursprung zurückkehrt, zeigt sie den Wert

$$s_1 = m\pi/(\eta\sqrt{R}) \quad (31)$$

während die ruhende Uhr um den Betrag

$$X^0(s_1) = \left(1 - \frac{1}{2} R C^2\right) \pi/\sqrt{R} \quad (32)$$

fortgeschritten ist. Der Unterschied der beiden Uhren nach einem halben Umlauf ist also

$$X^0(s_1) - s_1 = \pi/\sqrt{R} \left\{1 - (m/\eta) - \frac{1}{2} R C^2\right\} \quad (33)$$

Wir können nun aber die Konstante η mit Hilfe von (25) eliminieren. Setzen wir (28) ein, so folgt

$$m/\eta = (1 - R C^2)^{1/2} \quad (34)$$

Damit ergibt sich dann aber für (30)

$$X^0 = s + \frac{1}{4} C^2 \sqrt{R} \sin 2\sqrt{R} \left(1 + \frac{1}{2} R C^2\right) \cdot s \quad (35)$$

und für $s \ll s_1$

$$X^0 = s \left(1 + \frac{1}{2} C^2 R\right) \quad (36)$$

Aus (28) ersieht man aber, daß $C^2 R$ gerade die Anfangsgeschwindigkeit der Partikel im Ursprung ist. Gl. (36) ist also nichts anderes als die bekannte Formel für die Zeitdilatation für kleine Geschwindigkeiten.

Aus (35) und (31) ersieht man, daß beide Uhren nach einem halben Umlauf übereinstimmen werden, im Gegensatz zur üblichen Meinung. Besonders überraschend dürfte aber die Tatsache sein, daß die bewegte Uhr auch dann mit der im Ursprung ruhenden übereinstimmt, wenn sie vom Ursprung am weitesten entfernt ist, sich also momentan in Ruhe befindet.

Die Zeigerstellung der bewegten und der ruhenden Uhr mögen beziehungsweise mit

$$s_1 - \sigma; \quad X^0(s_1) - \tau \quad (37)$$

bezeichnet werden. Dann ergibt sich kurz vor Rückkehr der bewegten Uhr, also für kleine σ und τ

$$\tau = \sigma \left(1 + \frac{1}{2} C^2 R\right). \quad (38)$$

Die bewegte Uhr geht dann wieder langsamer, wie es natürlich in einem fast galileischen Koordinatensystem sein muß.

Diese Resultate sind keineswegs überraschend, wenn man bedenkt, daß die oft angeführte Bedingung für eine ideale Uhr, nämlich daß eine Beschleunigung keinen Einfluß auf ihren Gang haben soll, in der allgemeinen Relativitätstheorie natürlich sinnlos ist.

Aus der Definition des RICCI-Tensors (8) und der Formel (27) folgt

$$\begin{aligned} R_{nm} &= -\delta_{nm} R_{(n)} + B^p_{n\dot{p}m} \\ R_{oo} &= -(R_{(1)} + R_{(2)} + R_{(3)}). \end{aligned} \quad (39)$$

Die Spur dieses Tensors

$$R^\alpha_\alpha = B^{\dot{p}n}_{pn} - 2(R_{(1)} + R_{(2)} + R_{(3)}) \quad (40)$$

ist nach (3) gleich der Spur des Energie-Impuls-Tensors. Die Energiedichte ist

$$T_{oo} = \frac{1}{2} B^{nm}_{nm} \quad (41)$$

und daraus folgt die Beziehung

$$T^\alpha_\alpha - 2 T_{oo} = T^n_n - T_{oo} = -2(R_{(1)} + R_{(2)} + R_{(3)}) \quad (42)$$

aus der ersichtlich ist, daß unsere Bedingung, daß ein $R_{(n)}$ positiv sein soll, jedenfalls nicht der physikalischen Bedingung $T_{oo} \geq 0$ widerspricht.

Wir wollen zum Abschluß dieses Abschnittes die Gültigkeitsgrenzen unserer Formeln untersuchen. Die Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen von X^n kann offensichtlich immer durch Einschränkung der Amplituden C gerechtfertigt werden. Insbesondere haben wir RC^2 als sehr viel kleiner als eins angenommen. Nun ist aber das Quadrat der Geschwindigkeit mit (28) auch von derselben Größenordnung da η/m von der Größenordnung eins ist. Die gemachten Annäherungen entsprechen also einer nicht-relativistischen Näherung. Die höheren Glieder der Entwicklung des metrischen Tensors werden aber auch zeit-abhängige Terme enthalten und wir müssen daher verlangen, daß diese Glieder keine merklichen Beiträge während einer halben Periode liefern. Für ein statisches Feld ist diese Bedingung natürlich trivialerweise erfüllt und im allgemeinen Falle kann man sie durch Angabe einer unteren Schranke für $|R|$ befriedigen. Die Amplitude C muß dann natürlich umso kleiner gewählt werden. Die Vernachlässigung der quadratischen Terme in den Koordinaten, die mit der Geschwindigkeit multipliziert sind, ist sicher gerechtfertigt, da diese Ausdrücke die Amplituden in dritter und höherer Näherung enthalten. Außerdem verschwindet die Geschwindigkeit immer dann, wenn die Entfernung der Partikel am größten ist.

Diese Ergebnisse können nun leicht auf die SCHWARZSCHILDsche Lösung angewendet werden. Wir verwenden hier nur die asymptotische Form in großer Entfernung von der Masse M in isotropen Koordinaten¹

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= (1 - 2M/\varrho) (dX^0)^2 - (1 + 2M/\varrho) [(dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2] \\ \varrho &= [(X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (43)$$

¹ Siehe zum Beispiel A. S. EDDINGTON, The Mathematical Theory of Relativity, Cambridge University Press, Second Edition 1924, p. 93.

Die Komponenten des RIEMANNschen Tensors wurden von KOHLER² in Polarkoordinaten abgeleitet und nach Transformation in das isotrope Koordinatensystem erhält man für die uns hier interessierenden Komponenten

$$\begin{aligned} R_{0101} &= M/\varrho^5 \cdot [2(X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2] \\ R_{0102} &= 3M/\varrho^5 \cdot X^1 X^2 \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (44)$$

Wir müssen nun diesen Tensor in der Umgebung des Punktes X_0^α entwickeln und ein geodätisches Koordinatensystem einführen. Dazu dient die Transformation

$$\begin{aligned} X^{0'} - X_0^{0'} &= (1 - 2M/\varrho)^{1/2} (X^0 - X_0^0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_0 (X^\alpha - X_0^\alpha) (X^\beta - X_0^\beta) \\ X^{n'} - X_0^{n'} &= (1 + 2M/\varrho)^{1/2} (X^n - X_0^n) + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} n \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}_0 (X^\alpha - X_0^\alpha) (X^\beta - X_0^\beta) \end{aligned} \quad (45)$$

die aber in der von uns betrachteten Näherung die Ausdrücke für den RIEMANNschen Tensor im Punkte X_0^n nicht beeinflusst. Das heißt, daß dieser Tensor im Punkte X_0^n durch (44) gegeben ist, worin wir nur X^n durch X_0^n zu ersetzen haben. Die Striche lassen wir wieder der Kürze halber weg. Wir müssen nun die Tensorkomponenten R_{onom} auf Diagonalform bringen. Wählen wir für X_0^n speziell $(X, 0, 0)$, so verschwinden alle Glieder außerhalb der Diagonale und mit (27) erhält man

$$\begin{aligned} R_{(1)} &= 2MX^{-3} \\ R_{(2)} &= R_{(3)} = -MX^{-3} \end{aligned} \quad (46)$$

Nach dem vorhin Gesagten, können also Schwingungen in der Richtung der Verbindungslinie der zentralen Masse mit dem betrachteten Aufpunkt vorkommen.

Da die Masse der Sonne gleich $1,5 \cdot 10^5$ cm beträgt, und die Entfernung der Sonne von der Erde im Mittel $1,5 \cdot 10^{13}$ cm ist, folgt für die Kreisfrequenz der Schwingungen, die von der Sonne in der Entfernung der Erde verursacht werden, ungefähr $3 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^{-1}$. Das Gravitationsfeld der Erde ist dabei natürlich vernachlässigt. Betrachten wir dagegen nur dieses, so ergeben sich auf der Erdoberfläche Schwingungen mit der Kreisfrequenz $2 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$. Für eine Amplitude von $C = 1$ mm, ergibt sich aus (28) eine Anfangsgeschwindigkeit $2 \cdot 10^{-8} \text{ cm sec}^{-1}$ für die von der Sonne verursachten Schwingungen und eine Anfangsgeschwindigkeit von $1,5 \cdot 10^{-4} \text{ cm sec}^{-1}$ für die von der Erde auf der Erdoberfläche verursachten Schwingungen.

² M. KOHLER, Z. f. Phys. **130**, 139 (1951). Da Kohler das Linienelement verschieden definiert, müssen wir die von ihm angegebenen Komponenten des RIEMANNschen Tensors mit -1 multiplizieren.

3. Eine elektrisch geladene Uhr im konstanten Magnetfeld

Ein konstantes magnetisches Feld der Stärke B in der $X^3 (= Z)$ -Richtung in einem geodätischen Koordinatensystem kann aus dem Vektorpotential

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -\frac{1}{2} B Y, \quad A_2 = \frac{1}{2} B X, \quad A_3 = 0 \quad (47)$$

abgeleitet werden. Wir wollen hier nicht die strenge Lösung der kombinierten EINSTEINSchen und MAXWELLSchen Gleichungen für ein Magnetfeld der Form (47) benützen, sondern die Komponenten des RICCI-Tensors in allgemeiner Form wie in dem vorigen Abschnitt belassen. Da die Metrik des Raumes im allgemeinen auch von benachbarten schweren Massen beeinflusst sein wird, werden keine überflüssigen Parameter in den Endergebnissen aufscheinen. Allerdings müßte gezeigt werden, daß die Annahme (47) in der strengen Theorie möglich ist. Da aber eine Entwicklung des Vektorpotentials in eine TAYLOR-Reihe sicher erlaubt ist und quadratische Glieder, wie wir gleich sehen werden, in unseren Näherungen vernachlässigbar sind, können wir (47) für unsere Zwecke benutzen.

Die Bewegung einer geladenen Partikel kann aus

$$\delta \int d\tau \{m (g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta)^{1/2} - e A_\alpha \dot{X}^\alpha\} = 0 \quad (48)$$

abgeleitet werden. Da der Integrand wieder zeit-unabhängig ist und der zweite Ausdruck unabhängig von \dot{X} ist, gelten die Gln. (18) bis (22) auch hier. Vernachlässigen wir wieder die mit der Geschwindigkeit multiplizierten quadratischen Terme in den Koordinaten, wodurch (47) nun gerechtfertigt ist, so erhalten wir

$$\delta \int ds \left\{ m [g_{00} \dot{X}^{02} + \delta_{nm} \dot{X}^n \dot{X}^m]^{1/2} - \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e B [(X^1) (\dot{X}^2) - (X^2) (\dot{X}^1)] \right\} = 0 \quad (49)$$

während die Gl. (25) ungeändert bleibt. Wir wollen hier nur Bewegungen in der X - Y -Ebene betrachten und der Einfachheit halber

$$R_{(1)} = R_{(2)} = R \quad (50)$$

annehmen. Die Bewegungsgleichungen lauten in kartesischen Koordinaten

$$\ddot{X} + \eta^2/m^2 \cdot R \cdot X - e/m \cdot B \cdot \dot{Y} = 0 \\ \ddot{Y} + \eta^2/m^2 \cdot R \cdot Y + e/m \cdot B \cdot \dot{X} = 0 \quad (51)$$

aus der die Lösungen

$$X = U \sin \omega s \\ Y = V \cos \omega s \quad (52)$$

folgen, worin wir eine Phasenkonstante willkürlich Null gesetzt haben.

Die Kreisfrequenz ist durch

$$-\omega^2 + \eta^2/m^2 \cdot R = \pm e/m \cdot B \cdot \omega \quad (53)$$

gegeben und die Amplituden folgen dann entsprechend

$$U = \mp V \quad (54)$$

Aus (53) und (54) folgt dann die allgemeine Lösung, die aus einer Linearkombination von Ausdrücken (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) aufgebaut ist, worin (X_1, Y_1) von der Form (52) mit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= B e/2 m \cdot [1 + \{1 + (2 \eta/B e)^2 \cdot R\}^{1/2}] \\ U_1 &= + V_1 \end{aligned} \quad (55)$$

ist und (X_2, Y_2) entsprechend

$$\begin{aligned} \omega_2 &= B e/2 m \cdot [\{1 + (2 \eta/B e)^2 \cdot R\}^{1/2} - 1] \\ U_2 &= - V_2 \end{aligned} \quad (56)$$

Für verschwindende Krümmung reduziert sich die Lösung (55) auf die bekannte Kreisbewegung einer Ladung im konstanten magnetischen Feld, während (56) in diesem Falle eine ruhende Ladung beschreibt.

Zum Vergleich einer im Ursprung ruhenden Ladung mit einer, die diese Kreisbewegungen ausführt, können wir wieder die Gl. (21) integrieren. Man erhält unter der Annahme, daß die Uhren übereinstimmen, wenn $X^0 = s = 0$

$$X^0(s) = \eta/m \cdot (1 - R U^2) \cdot s \quad (57)$$

Wir wollen wieder die Konstante η mit Hilfe von (25) eliminieren:

$$(\eta/m)^2 = 1 + U^2(R + \omega^2). \quad (58)$$

Der Unterschied der beiden Uhren nach einer vollen Umdrehung der bewegten Uhr ist dann

$$X^0(s_1) - s_1 = \pi U^2/\omega_{1,2} \cdot (\omega_{1,2}^2 - R). \quad (59)$$

Setzen wir (58) in (53) ein, so erhalten wir $\omega_{1,2}$ als Funktion von U , zum Beispiel für ω_1

$$\omega_1 = e B/2 m \cdot (1 + R U^2) \{1 + [1 + (2 m/e B)^2 \cdot R]^{1/2}\} \quad (60)$$

Für kleine Werte von R und U erhält man daraus

$$\omega_1 = e B/m \cdot [1 + R (U^2 + m^2/e^2 B^2)] \quad (61)$$

und ähnlich für ω_2 :

$$\omega_2 = m R/e B \cdot (1 + R U^2). \quad (62)$$

In derselben Näherung lautet die Gleichung für die Zeitdifferenz der beiden Uhren für die Bewegung mit Index 1:

$$X^0(s_1) - s_1 = \pi U^2 e B/m \quad (63)$$

und für die Bewegung mit Index 2:

$$X^0(s_1) - s_1 = -\pi U^2 e B/m. \quad (64)$$

Aus (52), (55) und (56) ersieht man, daß die zwei möglichen Kreisbewegungen verschiedenen Umlaufsinn haben. Nach (63) und (64) bleibt eine Uhr, die die Bewegung mit Index 1 ausführt, gegenüber einer ruhenden Uhr zurück, während eine entsprechend dem Typus 2 bewegte Uhr einer ruhenden Uhr vorläuft.

Im allgemeinen wird die Bewegung 2 langsamer erfolgen da R gewöhnlich eine kleine Größe ist, während ein Proton in einem magnetischen Feld der Stärke 10^4 Gauss eine Kreisfrequenz von ungefähr 10^8 sec^{-1} besitzt. Die Zeitdifferenz ist dann nach (63) 10^{-8} sec .

Die hier benutzten Kreisfrequenzen sind mit den von einem ruhenden Beobachter gemessenen durch

$$\omega_{ruh} = \omega \left[1 + \frac{1}{2} U^2 (R - \omega^2) \right] \quad (65)$$

verknüpft.

4. Zur Definition einer idealen, elektrisch geladenen Uhr

Wir wollen zum Abschluß noch kurz eine mögliche Definition einer idealen Uhr, die eine elektrische Ladung trägt, behandeln. Unseres Wissens wurde diese Möglichkeit noch nirgends diskutiert und wir glauben daher mit dieser kurzen Betrachtung wenigstens eine logische Lücke zu schließen.

Nach (1) zeigt eine ideale Uhr direkt die Weltstanz an, die die Uhr seit Verlassen eines gewählten Anfangspunktes zurückgelegt hat. Diese Definition wurde gewählt, weil die mit Hilfe solcher Uhren gemessene Lichtgeschwindigkeit stets und überall den Wert eins hat. Dabei müssen natürlich auch ideale Maßstäbe verwendet werden, worauf wir aber nicht einzugehen brauchen. Diese Definition hat dann zur Folge, daß die Periode der Uhr unabhängig von ihrer Geschichte ist. Es ist naheliegend, dieselbe Definition auch für Uhren zu verwenden, die eine elektrische Ladung tragen, wie wir es im vorigen Abschnitt getan haben. Wir wollen nun aber eine andere Definition besprechen, die zwar auch die Eigenschaft der Unabhängigkeit der Periode von der Geschichte hat, die aber nicht den universellen Wert der Geschwindigkeit des Lichtes ergibt, wenn mit Hilfe solcher Uhren die Dauer von Lichtsignalen gemessen wird.

Schreiben wir wieder die Weltlinie in allgemeiner Parameterform $X^\alpha(\tau)$, und bezeichnen wir die Zeigerstellung der Uhr im Punkte $X^\alpha(\tau_1)$ mit σ_1 und die im Punkte $X^\alpha(\tau_2)$ mit σ_2 , so können wir beispielsweise

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau \{ (g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta)^{1/2} - e/m \cdot A_\alpha \dot{X}^\alpha \} \quad (66)$$

schreiben. Die Periode der Uhr hängt dann, abgesehen von der spezifischen Ladung der Uhr, nur von den Werten des metrischen Tensors und des Vektorpotentials im Weltpunkt der Uhr ab.

Ein Einwand gegen diese Definition ist, daß sie nicht eich-invariant im Sinne der klassischen Elektrodynamik ist. Aber es wäre natürlich möglich, daß man mit solchen Uhren, sollten sie in Natur vorkommen, eine bestimmte Eichung des Vektorpotentials vor allen anderen auszeichnen könnte.

Mit den früher eingeführten Bezeichnungen erhält man für die Bewegung in einem konstanten magnetischen Feld der Form (47)

$$\sigma_1 - \sigma_2 = (s_1 - s_2) [1 + e B U V \omega_{1,2}/2 m] \quad (67)$$

und daher nach einem vollen Umlauf der bewegten Uhr

$$X^0(\sigma_1) - \sigma_1 = X^0(s_1) - s_1 - \pi e B U V / m \quad (68)$$

da für die im Ursprung ruhende Uhr der zweite Ausdruck im Integranden in (66) verschwindet. An Stelle von (63) und (64) erhält man

$$X^0(\sigma_1) - \sigma_1 = 0 \quad (69)$$

Die Behauptung, daß alle Uhren, deren Periode unabhängig von der Geschichte ist, notwendig das Uhrenparadox demonstrieren, ist also jedenfalls unrichtig.

Ob die Definition (66) in einem gegebenen Falle die Richtige ist, läßt sich leicht entscheiden, wenn solche Uhren mit verschiedener elektrischer Ladung vorhanden sind. Eine Weiterführung dieser Gedankengänge würde offensichtlich wieder zu einer, allerdings relativistisch invarianten Äthervorstellung der elektromagnetischen Erscheinungen führen.

Zum Abschluß möchte ich Herrn Dr. KURT LANDECKER für wertvolle kritische Bemerkungen danken.

Buchbesprechungen

An Approach to Modern Physics. Von E. N. DA C. ANDRADE. IX, 232 S. London: G. Bell and Sons, Ltd. 1956 25 s.

Das Werk des Verfassers: „The Mechanism of Nature“, 1930, wurde fast zur Gänze neu bearbeitet und mit weiteren Kapiteln bereichert, was bereits durch einen neuen Titel angedeutet wird. Lediglich der Zweck des Buches bleibt der gleiche, nämlich Nichtphysikern die moderne Physik in leicht verständlicher Form näher zu bringen. Dem Verfasser ist dies wiederum ausgezeichnet gelungen. Im ganzen Werk findet sich (ausgenommen einige Zahlen) keine einzige Formel — um ja niemand abzuschrecken —, dagegen aber etliche sehr instruktive Bilder.

Der Verfasser vermittelt die Entwicklung der physikalischen Forschung in den einzelnen Gebieten und stellt nebenbei die einzelnen Forscher vor. In den einzelnen Kapiteln werden hierbei folgende Probleme behandelt: Energie, Schwingung, Strahlung, Elektrizität, feste und flüssige Stoffe, Quantentheorie, Atom, Atomkern, Kernumwandlung und Unbestimmtheitsrelation.

Das Buch kann allen, die sich bemühen, die Ergebnisse der modernen physikalischen Forschung kennenzulernen, vor allem den Technikern und Naturphilosophen empfohlen werden. Daneben wird es den Studenten helfen, einen guten Überblick zu gewinnen.

H. ZINGL, Graz

Introduction to Electrical Applied Physics. Von N. F. ASTBURY. Mit Textabb., XI, 241 S. London: Chapman & Hall Ltd. 1956. 36 s.

Der Verfasser hält sich bereits an das von der Internationalen Elektrotechnischen Kommission vorgeschlagene Maßsystem. Das Buch bringt die Grundlagen der Elektrotechnik in modernster Darstellung und weist auf die wichtigsten Anwendungen hin. Nach einer kurzen physikalischen Einleitung werden in je einem Kapitel das elektrische und magnetische Feld beschrieben, ein weiteres Kapitel behandelt die MAXWELLSchen Gleichungen. In weiterer Folge findet man die Regeln von KIRCHHOFF, Schwingkreis und Induktion sowie deren Anwendungen auf Meßgeräte, Relais, Elektromagneten, Ferrite etc. Ein weiteres Kapitel beinhaltet elektromechanische und elektroakustische Systeme.

Abschließend kommt der Verfasser auf Elektronenstrahlen, deren Fokussierung und Ablenkung zu sprechen. Und wieder ist die Anwendungsmöglichkeit sehr vielseitig, was durch einige Beispiele wie Röhren, Kathodenstrahlgeräte u. dgl. mehr illustriert wird, wobei auf die einzelnen Vorgänge sehr genau eingegangen wird. Im Anschluß daran werden noch die elektromagnetischen Wellen und Strahlung kurz gestreift, soweit es für den Elektrotechniker interessant ist.

Das Buch ist sehr übersichtlich, dies trotz der relativ vielen Gleichungen und enthält viele Zeichnungen. Es ist für alle Physiker und Techniker zu empfehlen, die einen Überblick über den derzeitigen Stand der Elektrotechnik, im besonderen der Elektronik erhalten wollen.

H. ZINGL, Graz

Friction and Lubrication. Von F. P. BOWDEN und D. TABOR. Mit 58 Textabb., 7 Tafeln, X, 150 S. London: Methuen & Co. Ltd.—New York: J. Wiley & Sons Inc. 1956. 10 s. 6 d.

Das Buch gibt eine einfache und klare Einführung in die beiden Gebiete Reibung und Schmierung. Diese werden umfassend untersucht, die Vorgänge bis ins einzelne erklärt und an praktischen Beispielen vorgeführt. Doch werden nicht alle Materialien behandelt, sondern nur solche herangezogen, die für den betreffenden Fall charakteristisch sind. Dabei werden verhältnismäßig oft Kupfer und Stahl berücksichtigt. Unter den Schmiermitteln werden vor allem neue synthetische Produkte und die Wirkungsweise ihrer Bestandteile angegeben. Auf die mathematische Behandlung ist bewußt verzichtet worden, es wird alles rein qualitativ oder mit Diagrammen behandelt. Das Buch kann als gute Einführung dienen, genügt aber nicht für den, der in seiner Arbeit etwas mehr mit Reibung und Schmierung zu tun hat. Für diesen sind am Ende jedes Kapitels mehrere Bücher und Artikel angegeben.

B. SCHNIZER, Graz

Elektrische und magnetische Potentialfelder. Von H. BUCHHOLZ. Mit 202 Textabb., XIX, 552 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 72. —.

Die Behandlung elektrischer und magnetischer Potentialfelder ist sowohl für den Techniker als auch für den Physiker von großer Bedeutung. Der Verfasser behandelt Randwertaufgaben aus dem Gebiete der Elektrostatik, Magnetostatik und der elektrischen Strömung und versteht es, in sehr verständlicher Weise von den einfacheren zu den schwierigeren Problemen aufzusteigen. Dabei wurde der Methode der Partikularlösungen der Vorzug gegeben, da sie eine einfache Handhabung gestattet und äußerst leistungsfähig ist. Auch das Hochfrequenzfeld zwischen parallelen Leitern findet seine Behandlung, da es in guter Näherung ebenfalls als Potentialfeld angesehen werden darf. Von den in diesem Werk durchgerechneten Aufgaben, sind besonders zu erwähnen: Zwei parallele Zylinder mit gleichartiger Ladung, die Punktladung vor einer Kugelkappe mit kreisförmiger Öffnung und zwischen divergierenden Platten, die Stromspule in einem aufgeschlitzten Ringkörper und der stromdurchflossene Leiter in Hohlkanälen verschiedener Querschnittsform innerhalb vollkommen permeabler Körper u. a. m. Nach einer kurzen Übersicht über die physikalischen Grundgesetze werden die mathematischen Hilfsmittel für die Integration der LAPLACE-Gleichung bereitgestellt. Hier nimmt die Wahl des zweckmäßigsten Koordinatensystems unter besonderer Berücksichtigung der krummlinigen orthogonalen Koordinaten naturgemäß einen breiten Raum ein. Auch die GREENSchen Sätze und GREENSchen Funktionen sowie die konforme Abbildung werden übersichtlich dargestellt. Dann wendet sich der Verfasser der Erörterung elektrischer Felder zu, wobei zuerst die ebenen und dann die räumlichen elektrischen Felder behandelt werden. Hier sei besonders auf die sehr schöne Darstellung des Breitbandkabels in allen seinen technisch wichtigen Anordnungen hingewiesen. Dann folgen räumliche, magnetische und hochfrequente Felder. An diese schließen sich die ebenen magnetischen Felder an, denen ein besonders großer Raum zugewiesen wurde. Aus der Fülle des Materials seien die Behandlung des Luftspaltfeldes der Vollpolmaschine und das Kräftefeld am Läufer hervorgehoben, welche besonders in der modernen Technik einen wichtigen Platz einnehmen. Auch die Ableitung der Formel für die komplexe Potentialfunktion unter Zuhilfenahme der JACOBISchen Zeta-Funktion sei erwähnt. Den Abschluß bildet ein sehr lesenswerter mathematischer Anhang, der speziellen mathematischen Formeln gewidmet ist, die im Text gebraucht werden. Eine Anzahl Tabellen über wichtige Funktionen sowie ein ausführliches

Literaturverzeichnis und Sachverzeichnis runden das Werk in übersichtlicher Weise ab. Es kann allen auf diesem Gebiet arbeitenden Technikern und Physikern bestens empfohlen werden.

P. URBAN, Graz

Leitfaden der geometrischen Optik und des Optikrechnens. Mit praktischen Aufgaben. Von J. FLÜGGE. (Studia Mathematica: Band XI.) Mit 119 Textabb. und zahlreichen Tab., 202 S. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 1956. Geb. DM 19.80.

Das Buch fällt weitgehend aus dem Rahmen sonst üblicher Darstellungen der geometrischen Optik heraus. Physikbücher sind oft zu anschaulich und auf Plausibilität bedacht, oder stoßen mit Hilfe des Eikonals bis zu den Bildfehlern dritter Ordnung und weiter vor; beides wird der Sache wenig gerecht. Spezialwerke bringen dem, der sich nur grundsätzlich und mehr am Rande für das Thema interessiert, zuviel. Im vorliegenden Buch wird ein Mittelweg beschritten.

Breiter Raum ist der Berechnung der die Abbildung im achsnahen Gebiet bestimmenden Größen (Brennweite, Haupt- und Brennpunkte) gewidmet, Strahldurchrechnung bei der einzelnen brechenden (spiegelnden) Fläche, bei mehreren zentrierten Flächen, und was dann genau so geht, bei Linsen und Linsensystemen. Praktische Gesichtspunkte stehen im Vordergrund, theoretische Entwicklungen sind stets durch Zahlenbeispiele ergänzt. Zusammen mit einem Abschnitt über Strahlenbegrenzung ist so der Grund zu einem prinzipiellen Verständnis der Wirkungsweise optischer Instrumente gelegt. Kürzer, teilweise auf die Herleitung zu verwendender Beziehungen verzichtend, ist das letzte Drittel über Bildfehler abgefaßt. Es wird ein etwas weiterführender Einblick, doch keine umfassende Theorie gegeben. Anschließend die vollständige Strahldurchrechnung eines dreilinsigen Anastigmaten (30 Seiten Tabellen) und für den fleißigen Leser 21 Übungsaufgaben mit Lösungen.

An einigen Stellen im Text werden mathematische Beziehungen aus Figuren abgelesen, was den Vorteil größerer Anschaulichkeit hat, aber nicht immer klar die Ordnung der verwendeten Näherung erkennen läßt, mehr ist kaum zu bemängeln. Die mathematischen Anforderungen gehen nicht über Trigonometrie und Analytische Geometrie hinaus. Zusammen: Eine ausgezeichnete Einführung in die geometrische Optik.

H. NEUER, Graz

Physik für Krankenpflegeschulen und das medizinisch-technische Personal. Von G. FUCHS. Mit 100 Textabb., 212 S. Wien: Brüder Hollinek. 1956. S. 75.—, geb. S. 85.—.

Bei der Darstellung der Physik für eine bestimmte Berufsgruppe ergibt sich immer die Schwierigkeit der Auswahl des rein physikalischen Stoffes und seines Verhältnisses zu den geforderten praktischen Anwendungen. In der vorliegenden „Physik für Krankenpflegeschulen und medizinisch-technisches Personal“ scheint das aber — vielleicht mit einer kleinen Einschränkung im Kapitel Mechanik — in besonders schöner Weise gelungen zu sein. Das Buch erhebt nicht Anspruch darauf, ein vollständiges physikalisches Wissen zu übermitteln, sondern erfüllt vielmehr die Aufgabe der Darstellung der physikalischen Grundbegriffe und ihre Anwendung auf medizinischem Gebiet. In leicht verständlicher Form sind wichtige Apparaturen und Instrumente aus Laboratorium und Klinik in ihrem Wirkungsmechanismus erklärt; so findet sich eine ausführliche Bearbeitung elektrischer Geräte für Diagnostik und Therapie, ein großes Kapitel über die Physik der Röntgenstrahlen und ein Abschnitt über Atomphysik und Radioaktivität. Darüber hinaus wirkt das Buch durch seine Hinweise auf physikalische Geschehnisse im Alltag und durch seine Aktualität anregend und ist dazu angetan, das Interesse zu ausführlicherem Studium der Physik zu wecken.

G. TSCHERNE, Graz

The Interference Systems of Crossed Diffraction Gratings. Theory of Moiré Fringes. Von J. GUILD. Mit 7 Textabb., 5 Tafeln, VIII, 152 S. Oxford: At the Clarendon Press. 1956. 25 s.

Der Autor gibt in der vorliegenden Monographie erstmals eine geschlossene und umfassende Darstellung der sogenannten Moiré-Streifen. Diese Interferenz-Erscheinung entsteht bekanntlich dann, wenn ähnliche transparente Gitter übereinandergelegt werden. Während die auf diese Art entstehenden „mechanischen Interferenzen“ grober Gitter schon des öfteren praktisch verwertet wurden und auch deren Deutung relativ einfach ist, legt der Autor hier eine eingehende beugungstheoretische Theorie der Erscheinungen bei kleinen Gitterkonstanten vor.

Nach einer allgemeinen Einführung (Kap. 1) und grundsätzlichen Betrachtungen (Kap. 2) bespricht der Autor die Erscheinungen bei zwei Gittern in Serie. In Kap. 4 werden die Merkmale der Streifensysteme und anschließend die Grundlagen für deren metrologische Verwendung dargelegt. Es wird hier besonders auf die Möglichkeiten der praktischen Verwertung der Moiré-Streifen hingewiesen, etwa zur Bestimmung kleiner mechanischer Drehungen und Bewegungen oder auch zur vollautomatischen exakten Längenmessung. Im letzten Kapitel finden wir eine eingehende Analyse des Einflusses von Gitterfehlern auf das Aussehen der Streifensysteme. Damit fundiert der Autor die Methode der Gitterprüfung mittels Moiré-Streifen.

Hinzuzufügen ist noch, daß die vorliegende Monographie nur die mathematische Seite dieses Problems bringt. Beobachtungsverfahren, mechanische Montierung der Gitter u. ä. will der Verfasser in einer späteren Arbeit behandeln.

Die Ausstattung des Buches entspricht den an den bestens bekannten Verlag gestellten Erwartungen.

A. PURGATHOFER, Wien

Handbuch der Physik. — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band XIV: Kältephysik I. Mit 215 Textabb., VI, 349 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. Geb. DM 72.—, Subskriptionspreis DM 57.60.

Der vorliegende Band XIV bringt unter dem Sammeltitle „Kältephysik I“ („Kältephysik II“ in Band XV) folgende Beiträge:

1. J. G. DAUNT: „The Production of Low Temperatures Down to Hydrogen Temperatures.“ S. 1 bis 111, 101 Abb., Literaturangaben im Text.

Der Artikel behandelt in einer sehr glücklichen Parallelführung der theoretischen und praktischen Gesichtspunkte alle Typen von Kältemaschinen und Verflüssigern (Umkehrung des CARNOT-Prozesses, Ausnützung des JOULE-THOMSON-Effektes, isentropische Expansion). Die Beschränkung auf den Temperaturbereich des Wasserstoffs ($T_s = 20,4^\circ \text{K}$) ist mehr formaler Natur, im Grundsätzlichen sind eigentlich auch schon die meisten Probleme des Helium-Verflüssigers eingeschlossen. Ein eigenes Kapitel ist den theoretischen und konstruktiven Problemen der Wärmeaustauscher und der Regeneratoren gewidmet. Die vielen Abbildungen und Literaturhinweise unterstützen die Orientierung.

2. S. C. COLLINS: „Helium-Liquefiers and Carriers.“ S. 112 bis 136, 24 Abb., Literaturangaben im Text.

Der Konstrukteur des „COLLINS-Verflüssigers“ behandelt an Hand der wichtigsten zur Zeit in Verwendung stehenden He-Verflüssiger alle speziellen Fragen, die durch den Temperaturbereich ($T_s = 4,2^\circ \text{K}$) und die Eigenschaften des flüssigen He bedingt sind. Für den Physiker, der sich für Arbeiten mit tiefsten Temperaturen vorbereiten will, dürften die vielen konkreten Zahlenangaben sehr wertvoll sein, aber auch die ausgezeichneten Abbildungen. Der Abschnitt über Transport- und Vorratsgefäße ist zwar sehr kurz, enthält aber ausreichende Literaturhinweise, so daß auch er seinen Zweck erfüllen dürfte.

3. D. K. C. MAC DONALD: „Electrical Conductivity of Metals and Alloys at Low Temperatures.“ S. 137 bis 197, 43 Abb.

Von einer recht kritisch gehaltenen Übersicht über die historische Entwicklung der Elektronentheorie der metallischen Leitung, von DRUDE bis BLOCH, die aber auch bemerkenswerte Nebenlinien aufzeigt (THOMSON-LINDEMANN-WIEN), wird zu jenen Fragen hingeleitet, die für das Verhalten bei tiefsten Temperaturen bestimmend sind (Restwiderstand und seine Abhängigkeit von Fremdatomen, Gitterdefekten und Strukturumwandlungen, Widerstandsminimum). Der zweite Abschnitt gibt eine anregende Darstellung der experimentellen Probleme, die bei der Messung extrem kleiner Widerstände auftreten, wobei auch die verwendeten Galvanometer mit photoelektrischer Verstärkung, sowie die supraleitenden Galvanometer besprochen werden. Im dritten Abschnitt werden die Meßergebnisse mit der Theorie (Gesetz von BLOCH-GRÜNEISEN) verglichen und die Ursachen der auftretenden Abweichungen (Abschirmung des Atomrumpf-Feldes usw.) diskutiert. Den Abschluß des Artikels bildet die Besprechung der Änderung des Widerstandes im Magnetfeld, die nach JUSTI und Mitarbeitern bei tiefen Temperaturen zu merkwürdigen Anisotropie-Effekten führt, ferner der Effekte, die mit der Vergleichbarkeit der freien Weglänge mit den Probendimensionen zusammenhängen („size-effect“, anomaler Skineffekt) und die von MAC DONALD und Mitarbeitern festgestellte Wirkung des Magnetfeldes auf den „size-effect“, die im Falle dünner Na-Filme zu einer anfänglichen Widerstandsabnahme mit wachsendem Magnetfeld führt. Es ist dem Autor gelungen, mit der Diskussion der Tieftemperatur-effekte im Grunde genommen eine instruktive Erörterung der meisten Probleme der Elektronentheorie zu verbinden.

4. P. G. KLEMENS: „Thermal Conductivity of Solids at Low Temperatures.“ S. 198 bis 281, 18 Abb., 146 Literaturzitate.

Nach einer Einleitung, in der auch die grundsätzlichen Fragen der Meßtechnik bei tiefen Temperaturen gestreift werden, entwickelt der Verfasser zuerst die Theorie der Gitterleitung in dielektrischen Festkörpern, dann die Theorie der elektronischen Komponente der Wärmeleitung, die in den reinen Metallen überwiegt. Zum Verständnis des Verhaltens der Legierungen, aber auch einiger reiner Metalle, wie z. B. Wismut, Beryllium, sowie der Halbleiter Ge und Si muß die Überlagerung beider Mechanismen untersucht werden. Den Abschluß bildet die Behandlung der Wärmeleitung in Supraleitern, die durch eine Entkopplung der beiden Leitungsmechanismen gekennzeichnet ist. Bei supraleitenden Verbindungen scheinen etwas verwickeltere Effekte aufzutreten, die aber zur Zeit noch nicht restlos aufgeklärt scheinen. Experimentelle Ergebnisse werden in den einzelnen Abschnitten zur Illustration der theoretisch abgeleiteten Zusammenhänge angeführt, treten aber gegenüber dem theoretischen Teil etwas zurück.

5. P. H. KEESOM and N. PEARLMAN: „Low Temperature Heat Capacity of Solids.“ S. 282 bis 337, 29 Abb.

Der erste, einleitende Abschnitt bringt einen sehr vollständigen Überblick über die Entwicklung der Theorie der spezifischen Wärme (Gittertheorie und Theorie des Elektronenanteils), der dem Leser fürs erste ein Zurückgreifen auf die frühere Ausgabe des Handbuchs ersparen dürfte. Ein zweiter Abschnitt ist der Experimentalltechnik gewidmet, vor allem natürlich den speziellen Problemen der Messung extrem kleiner Wärmemengen. Der dritte Abschnitt bringt die Meßergebnisse im Bereich der He-Temperaturen, nach Gruppen des periodischen Systems diskutiert. Besonders behandelt werden die Abweichungen im Elektronenanteil der spezifischen Wärme bei den Übergangsmetallen, die durch die Energiebändertheorie weitgehend aufgeklärt werden können. Ein eigener Abschnitt behandelt die Verhältnisse im supraleitenden Zustand, ein Gebiet, auf dem KEESOM und

seine Mitarbeiter entscheidende Beiträge geliefert haben. Zum Schlusse werden noch die Abweichungen vom DEBYE-Gesetz besprochen, die sich nach SCHOTTKY auf Übergänge zwischen angeregten Zuständen zurückführen lassen; auch die Zusammenhänge mit den kooperativen Erscheinungen und die Dimensionseffekte („size-effect“) werden kurz gestreift.

K. M. KOCH, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band XV: Kältephysik II. Mit 318 Textabb., VII, 477 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. Geb. DM 112.—, Subskriptionspreis DM 89.60.

Der erste Artikel aus der Feder von J. VAN DEN HANDEL, welcher als Einführung gedacht ist, ist dem Magnetismus bei tiefen Temperaturen gewidmet. Nach einem historischen Überblick werden die wichtigsten Effekte magnetischer und elektrischer Felder bei ihrer Einwirkung auf die Energieniveaus magnetischer Ionen behandelt. Dabei werden die älteren Untersuchungsmethoden kritisch erörtert und hierauf die Behandlung der neueren Methoden aufgebaut. Die verschiedenen Relaxationen, wie z. B. die erst 1948 von DE VRIJER und GORTER entdeckte, sogenannte 3. Relaxation, finden hier ihre Behandlung. Dann wird die paramagnetische Resonanz erörtert, welche ganz besonders für die experimentellen Untersuchungen geeignet ist. Den Abschluß bildet der in neuerer Zeit besonders interessierende Antiferromagnetismus. Hier hat VAN VLECK mit seiner Theorie den Ausgangspunkt gefunden, an dem sich dann alle späteren Theorien anschließen. Eine sehr ausführliche Bibliographie zeigt das große Wachstum gerade in jüngster Zeit, welches dieses Gebiet außerordentlich vergrößert hat. Der nächste Artikel über adiabatische Entmagnetisierung stammt von D. DE KLERK und bringt zuerst eine ausführliche Thermodynamik der Entmagnetisierungsvorgänge. Dies erweist sich schon zur Bestimmung der absoluten Temperatur notwendig, die auf die KELVINSche Definition zurückgeht. In diesem Artikel wird ein sehr großes experimentelles Material zusammengestellt, unter welchem sämtliche Brückenschaltungen eine hervorragende Rolle einnehmen. Auch magnetische Untersuchungen der relativ hohen Temperaturen werden ausführlichst erörtert. Infolge der Fülle des Materials kann sich der Referent nur auf einen Überblick beschränken. Die magnetischen Untersuchungen bei tiefsten Temperaturen, insbesondere kooperative Effekte, Einfluß magnetischer Felder, Wärmeübertragung und thermisches Gleichgewicht, sowie Kernmagnetisierung werden sehr ausführlich und auch im Hinblick auf die neuere Entwicklung der Theorie behandelt. Die Supraleitfähigkeit wird im dritten Artikel von BERNARD SERIN experimentell und im vierten Artikel von JOHN BARDEEN theoretisch zusammengestellt. Speziell die Theorie der Supraleitfähigkeit wird mit allen ihren Varianten sehr übersichtlich und klar behandelt. Die LONDONSche Theorie als Ausgangspunkt stellt heute noch immer die beste Möglichkeit, sich in das Gebiet einzuarbeiten, dar. Daran schließt sich ein Überblick über die nichtlokalen Theorien und die Randbedingungen, sowie über die mikroskopischen Theorien. Hier ist vor allem bei den letzteren die HEISENBERGSche Theorie und die von FRÖHLICH vorgeschlagene Behandlung auf Grund der Elektron-Phonon-Wechselwirkungen zu erwähnen, die auch kurz gestreift werden. Der letzte Artikel über flüssiges Helium wurde von K. MENDELSSOHN verfaßt und bringt nach einem historischen Überblick eine ausführliche Behandlung des Helium I und Helium II Problems. Daß hier natürlich die BOSE-EINSTEIN-Kondensation nicht fehlen darf ist verständlich. Auch die thermodynamische Behandlung sowie das Problem von He³ wird in Diagrammen außerordentlich klar dargestellt. Die Superfluidität ist ebenfalls nicht übersehen worden und kann

in jeder Weise als äußerst klar dargestellt angesehen werden. Ein theoretischer Anhang bringt alles Wissenswerte über das ideale BOSE-EINSTEIN-Gas und das nichtideale BOSE-EINSTEIN-Gas, sowie über die LANDAUSche Theorie. Den Abschluß bildet wieder ein sehr ausführliches Literaturverzeichnis.

P. URBAN, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE.
Band XX: Elektrische Leitungsphänomene II. Mit 272 Textabb., VII, 491 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 112.—, Subskr.-Preis DM 89.60.

Der erste Abschnitt ist den heute so wichtig gewordenen Halbleitern gewidmet und wurde von O. MADELUNG verfaßt. Nach einer kurzen Übersicht über die Grundbegriffe der Halbleiterphysik, in welcher ihre Klassifikation auf Grund ihrer Stellung im periodischen System und ihrem Bindungstyp festgelegt wird, wird das Verhalten der Halbleiter im thermischen Gleichgewicht behandelt. Die Bestimmung der Elektronendichte und der Löcherdichte erfordert bekanntlich die Kenntnis der Besetzungswahrscheinlichkeit und der energetischen Lage der besetzbaren Terme in den Bändern. Es wird daher das Bändermodell erörtert. Hierauf behandelt der Verfasser die Eigenhalbleiter, Störstellenhalbleiter und die gemischten Halbleiter. Auch die chemische Statistik und die Raumladungen sowie die inneren Felder werden diskutiert. Daran schließt sich die Theorie der Leitfähigkeit in homogenen Halbleitern. Hierauf folgt die allgemeine Theorie der Leitfähigkeit in isotropen Halbleitern in sehr ausführlicher Darstellung. Hier sei vor allem auf die Behandlung der elektrischen, magnetischen und thermischen Effekte hingewiesen, welche durch ausführliche Tabellen und übersichtliche Darstellung gekennzeichnet ist. Die Vielfalt des hier Gebotenen zwingt den Referenten sich auf das Wesentliche zu beschränken und nur auf eine Auswahl hervorragender Merkmale einzugehen. Es folgen dann die Nichtgleichgewichtsprozesse in homogenen Halbleitern, so das Verhalten einer lokalen Dichteabweichung im Halbleiterinneren, der Einfluß der Oberflächen und die verschiedenen Leitungsprozesse. Besonders wichtig erscheint der Einfluß von Haftstellen auf die Fotoleitfähigkeit, die Löcherinjektion und der Fadentransistor. Ein eigener Abschnitt ist den p - n -Übergängen gewidmet, deren Theorie sich bekanntlich an die grundlegende Arbeit von SHOCKLEY anschließt. Hier wird auch die Feldemission und Stoßionisation erörtert sowie die mehrfachen p - n -Übergänge, die für die Transistoren und Gleichrichter von Bedeutung sind. Auch die Oberflächen und Kontakte wurden behandelt, wobei die SCHOTTKYsche Raumschichttheorie mit ihren Erweiterungen ihren Niederschlag findet. Der Kontakt Halbleiter-Halbleiter, aus dem die Theorie des Metall-Halbleiterkontaktes und des einzelnen Halbleiters mit inhomogener Störstellenverteilung als Grenzfälle hervorgehen, wird erörtert, wobei weitgehend auf die Arbeiten russischer Autoren Bedacht genommen wird. Den Abschluß dieses sehr lesenswerten Artikels bildet Halbleiteroptik, magnetische Probleme und die Bestimmungsmethoden der wichtigsten Halbleiterparameter, sowie eine Übersicht über die speziellen Halbleiter. Eine zusammenfassende Literaturübersicht bringt das heute schon recht angewachsene Schrifttum und gestattet eine leichte Einarbeitung in die verschiedenen Spezialprobleme.

Der nächste Abschnitt ist der Ionenleitfähigkeit gewidmet und stammt aus der Feder von A. B. LIDIARD. Die Darstellung behandelt die Modelle von FRENKEL und SCHOTTKY und bringt die Theorie sowie ihren Vergleich mit dem Experiment. Es wird auf die verschiedenen Polarisierungseffekte, Diffusion und thermoelektrischen Kräfte eingegangen, wobei der Verfasser außerordentlich schönes Bildmaterial und übersichtliche Tabellen bringt. Der dritte Abschnitt ist den elek-

trischen Eigenschaften des Glases gewidmet und stammt von J. M. STEVELS. Hier wird das Verhalten von Glas in elektrischen Feldern, seine Oberflächeneigenschaften usw. behandelt und alles für den Experimentator Wichtige zusammengestellt.

Der letzte Abschnitt ist der Elektrochemie gewidmet und wurde von E. DARMOIS verfaßt. Aus diesem sei besonders die ausführliche Erörterung der Messung der Wasserstoffionenkonzentration herausgegriffen sowie auf die Behandlung der elektrokinetischen Phänomene.

Auch dieser Band des neu erscheinenden Handbuches der Physik erfüllt die Erwartungen, welche in ihm gestellt sind, vollkommen und reiht sich würdig an die bereits erschienenen.

P. URBAN, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Bd. XXII: Gasentladungen II. Mit 337 Textabb., VII, 652 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. Geb. DM 128.—, Subskr. Preis DM 102.40.

Die ersten Bände des neuen Handbuches der Physik sind nunmehr herausgekommen und zeigen, daß sie würdige Nachfolger der ursprünglichen Ausgabe von GEIGER und SCHEEL sind, die zwischen 1926 und 1930 erschien. Das vergangene Viertel-Jahrhundert hat beachtliche Fortschritte sowohl in der internationalen Zusammenarbeit wie in der Physik selbst gebracht. Beides ist an dem monumentalen, neuen Werk zu erkennen. Die Autoren, zu den jeweils namhaftesten Forschern ihres Gebietes zählend, stammen aus aller Herren Länder und schreiben ihre Beiträge in Englisch, Französisch oder Deutsch. Der Fortschritt der Physik selbst machte die Aufnahme zahlreicher neuer Gebiete und damit eine vollständige Neuordnung des Stoffes und seine Ausdehnung auf 54 Bände notwendig. Zu den neu aufgenommenen Gebieten gehören auch die Gasentladungen, denen allein zwei Bände (Nr. 21 und 22) gewidmet sind. Während in Band 21 die Grunderscheinungen der Trägererzeugung, -bewegung und -vernichtung nebst sekundären Effekten behandelt werden, enthält Band 22 — von dem im folgenden allein die Rede ist — das Zusammenspiel aller dieser Erscheinungen bei den verschiedenen Typen von Entladungsvorgängen.

Der einführende Beitrag von F. LLEWELLYN JONES über „Ionisation Growth and Breakdown“ behandelt den räumlichen und den zeitlichen Aufbau der Entladung, der sich bei niedrigen Drucken nach dem TOWNSEND- und bei höheren Drucken nach dem Kanal-, bzw. streamer-Mechanismus vollzieht.

GORDON FRANCIS schildert in dem Artikel „The Glow Discharge at Low Pressure“ die Gesetzmäßigkeiten des Kathoden- und Anodenraumes der Glimmentladung und ferner besondere Erscheinungen, wie z. B. den Einfluß eines Magnetfeldes und die Kathodenzerstäubung.

Ein besonders wichtiges Hilfsmittel zum Studium der Elementarprozesse in Gasentladungen ist durch die Untersuchung der Leuchterscheinungen gegeben. Die Gesetzmäßigkeiten der Strahlungsvorgänge in Gasen und die Anwendung auf spezielle Entladungstypen bringt RICHARD G. FOWLER in seinem Artikel „Radiation from Low Pressure Discharges“.

Der Beitrag „Elektrische Bögen und thermisches Plasma“ von W. FINKELNBURG und H. MAECKER verdient nicht nur seines Forschung und Anwendung in gleicher Weise angehenden Inhaltes, sondern auch der Klarheit der Darstellung wegen ganz besondere Beachtung. Trotz der Mannigfaltigkeit der Bogentypen entsteht ein weitgehend einheitliches und klares Bild vom Bogenmechanismus, an dessen theoretischer und experimenteller Erarbeitung beide Autoren einen maßgeblichen Anteil haben. Auf die engen Beziehungen der Bogenphysik zu anderen Gebieten, wie etwa Astrophysik und Aerodynamik, und ferner auf die praktischen

Anwendungen des Bogens z. B. in der Hochtemperatur-, Licht-, Schweiß-, Schalt-, Vakuumschmelz- und chemischen Technik wird jeweils hingewiesen.

Der ausgezeichnete Artikel von LEONARD B. LOEB über „Electrical Breakdown of Gases with Steady or Direct Current Impulse Potentials“ steht in seinem Inhalt dem einleitenden Aufsatz von F. L. JONES so außerordentlich nahe, daß Wiederholungen bestimmter Zusammenhänge gar nicht vermieden werden konnten. Vielleicht sollte man gelegentlich einer Neuauflage auf eine noch bessere Koordination der einzelnen Beiträge achten.

Mit den beiden Aufsätzen von SANBORN C. BROWN über „Breakdown in Gases: Alternating and High-frequency Fields“ und von B. F. SCHONLAND über „The Lightning Discharge“, die die Sonderfragen der Zündung bei Wechselfeldern, bzw. der Blitzentladung behandeln, schließt der 22. Band des Handbuches der Physik.

Für die sichtende Sammlung und Herausgabe der so groß angelegten Enzyklopädie der Physik unserer Tage gebühren dem Herausgeber, Prof. S. FLÜGGE, sowie dem Springer-Verlag Dank und Anerkennung.

R. HAEFER, Vaduz/Liechtenstein

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band XXIV: Grundlagen der Optik. Mit 761 Textabb., VIII, 656 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. Geb. DM 132.—, Subskriptionspreis DM 105.60.

Die klassische Optik hat das Verhalten der elektromagnetischen Strahlung im sichtbaren Spektralbereich zum Gegenstand. Obwohl die experimentellen und theoretischen Methoden der klassischen Optik in den letzten 50 Jahren wesentlich erweitert wurden, haben sich doch ihre theoretischen Grundlagen, die einerseits auf den MAXWELLSchen Gleichungen und anderseits auf Verfahren der analytischen Mechanik fußen, nur wenig geändert. Die Bedeutung der klassisch-optischen Methoden ist allerdings weit über ihren früheren Rahmen angewachsen, bedingt durch den Umstand, daß diese mit Erfolg zur Behandlung der Fokussierungs- und Abbildungseigenschaften von Korpuskularstrahlen und der elektromagnetischen cm-Wellen-Strahlung herangezogen werden konnten.

Der vorliegende Band XXIV des „Blauen Handbuches“ ist den Grundproblemen der klassischen Optik gewidmet und in fünf größere Abschnitte unterteilt. Durch die Mitarbeit zweier bekannter französischer Physiker, Prof. A. MARÉCHAL, Institut d'Optique, Paris, und Prof. M. FRANÇON, Institut d'Optique, Paris, welche die Kapitel über „allgemeine geometrische Optik“ und über „Wellenoptik“ verfaßt haben, gewann der Band an potentielltem Wert. Leider sind diese grundlegenden Kapitel in französischer Sprache abgefaßt, was die Lektüre für den nur mit Schulfranzösisch ausgestatteten Physiker doch etwas beeinträchtigt. Vielleicht könnte in einer Neuauflage dieses Bandes eine deutsche Übersetzung erfolgen.

Die anschließenden Abschnitte „Optik dünner Schichten“ (4. Kapitel) und moderne, optische Verfahren zur Sichtbarmachung von kontrastarmen Objekten („Schlieren-Phasenkontrast-Lichtschnittverfahren, 5. Kapitel) stammen von Prof. H. WOLTER, Universität Marburg, Deutschland, welcher an der Entwicklung dieser aktuellen Zweige der klassischen Optik hervorragend beteiligt ist.

Das erste Kapitel über die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit (englisch verfaßt) hat Dr. E. BERGSTRAND, Stockholm, Schweden, zum Autor und bringt einen interessanten, gut redigierten Überblick über alte und aktuelle Methoden. Von diesen erwähnen wir die modernen Verfahren der cm-Wellen-Technik, welche neben quasi-optischen Methoden (z. B. Interferenzverfahren) sehr genaue Hohlrohr-, bzw. Hohlraumverfahren zur Entwicklung gebracht hat. Letztere zeichnen

sich durch besondere Einfachheit des prinzipiellen Aufbaues aus und gestatten über eine Frequenz- und Wellenlängenmessung die c -Bestimmung durchzuführen.

Wir gehen im folgenden noch etwas näher auf die Abschnitte 2 und 3 des Handbuches ein: Im 2. Kapitel (MARÉCHAL) wird die geometrische Optik aus den MAXWELLSchen Gleichungen durch den Grenzübergang $\lambda \rightarrow 0$ abgeleitet. Man erhält dadurch die Eikonalgleichung der Strahlenoptik und damit auch das FERMATsche Prinzip. Damit ist die Strahlenoptik zwanglos in die MAXWELLSche Theorie eingebaut und besitzt nicht mehr die isolierte Stellung älterer Darstellungen (vgl. diesbezüglich den analogen Artikel im Band XVIII des alten Handbuches). Aus dem FERMATschen Prinzip werden die allgemeinen Abbildungseigenschaften entwickelt und insbesondere die Theorie der Paraxialstrahlen (GAUSSsche Dioptrik) eingehend behandelt. Es folgt eine ausführliche Darstellung der chromatischen und geometrischen Aberrationen dritter und höherer Ordnung.

Das sehr umfangreiche 3. Kapitel (M. FRANÇON) enthält die allgemeinen Grundlagen der Wellenoptik und beschäftigt sich eingehend mit den klassischen Attributen der Wellenstrahlung, den Interferenz- und Beugungserscheinungen. Letztere werden, der üblichen Einteilung folgend, nach Nah- und Fernzoneneffekte unterschieden (FRAUENHOFERSche und FRESNELSche Beugung) und gesondert behandelt. Die theoretischen Deduktionen erfolgen auf Grund des HUYGENS-FRESNELSchen Prinzips. In Analogie zum 2. Kapitel wäre als Ausgangspunkt die aus den MAXWELLSchen Gleichungen resultierende, erweiterte KIRCHHOFFSche Beugungsformel vielleicht vorzuziehen gewesen, um auch hier den Anschluß an die allgemeine Theorie der elektromagnetischen Felder herzustellen. Der Artikel schließt mit den verschiedenen optischen Methoden zur Erzeugung polarisierter Strahlung. In der wohlabgewogenen Darstellung des Verfassers kommen theoretische und experimentelle Methoden, bzw. Ergebnisse sehr gleichmäßig zur Geltung und geben dadurch dem Leser eine umfassende Einsicht in dieses zentrale Gebiet klassischer Optik.

E. LEDINEGG, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE.

Band XXXII: Strukturforschung. Mit 373 Textabb., VII, 663 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 144.—, Subskr.-Preis DM 115.20.

Der vorliegende Band behandelt die Röntgenkristallstrukturanalyse sowohl vom Standpunkt der experimentellen Methodik (A. GUINIER und G. VON ELLER) als auch der Theorie (J. BOUMAN); die Röntgenbeugung an Flüssigkeiten und amorphen Stoffen (G. FOURNET), die Röntgenkleinwinkelstreuung (BEEMAN, KAESBERG, ANDEREGG, WEBB), die Elektroneninterferenzen (H. RAETHER) und die Neutronenbeugung (G. R. RINGO).

Über das große Gebiet der Kristallstrukturanalyse liegen bereits so viele ausgezeichnete zusammenfassende Darstellungen vor, daß es schwer ist, hier noch etwas wesentlich besseres zu bringen. Immerhin darf aber die sehr übersichtliche und klare Darlegung der ersten zwei Kapitel hervorgehoben werden, die nur im theoretischen Teil manchen Leser vielleicht etwas zu formal anmuten wird. Natürlich kann man auf dem gedrängten Raum (etwas über ein Drittel des Buches) keine Vollständigkeit erwarten. So vermißt der Referent zum Beispiel eine nähere Behandlung der Faserdiagramme und Texturaufklärung.

Im Gegensatz zu den wohlfundierten Methoden und Ergebnissen der Kristallstrukturanalyse dringen die beiden folgenden Kapitel in Neuland vor. Der Abschnitt von FOURNET stützt sich vor allem auf die eigenen sicher sehr wertvollen Arbeiten des Verfassers. Aber man wird nicht ganz befriedigt sein, wenn man dem großen formalen Apparat die wenigen Ergebnisse entgegenhält, die damit er-

reicht werden. Hier sollte nach Meinung des Referenten ein größerer Raum für die Bestimmung der Abstandstatistik durch FOURIER-Umkehrung und die bisher damit erzielten Ergebnisse reserviert werden.

Das vierte Kapitel befaßt sich vorzugsweise mit den verdünnten kolloiden Systemen und bringt eine schöne Zusammenfassung der wichtigsten bisherigen Ergebnisse. Daß die dichtgepackten Systeme und die interpartikulären Interferenzen verhältnismäßig kurz abgetan werden, wird man eher loben müssen, da das meiste, was auf diesem Gebiet vorliegt, wohl noch nicht als handbuchreif bezeichnet werden kann. Dafür wird man für die ausführlichere Behandlung der Gitterfehler dankbar sein.

Die beiden letzten Kapitel über Elektronen- und Neutronenbeugung füllen eine Lücke in der Literatur. Sie verbinden klare Darstellung mit reichhaltigem Inhalt und dürfen, soweit der Referent beurteilen kann, voll bejaht werden.

Alles in allem ist der vorliegende Band seiner Vorgänger nicht unwürdig. Druck und Ausstattung sind von gewohnter Güte. G. POROD, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band XXXV: Atome I. Mit 61 Textabb., V, 454 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 99,50, Subskriptionspreis DM 79,60.

Der Band enthält zwei Artikel. Der erste behandelt die fundamentalen Konstanten der Atomphysik und ist von Dr. E. R. COHEN und Dr. J. W. M. DUMOND verfaßt worden. Da in den letzten 25 Jahren die physikalische Technik der Meßmethoden einen enormen Aufschwung genommen hat, ist auch die Bestimmung der verschiedenen Konstanten wesentlich verbessert worden. So wurde beispielsweise die Technik der Atomstrahlmethode und die Radiospektroskopie seit dem Jahre 1940 zu einem hohen Maße weiterentwickelt und zur Bereicherung unserer Kenntnisse und kritischen Studien durch verschiedene Autoren herangezogen. Den Ausgangspunkt bildete die wichtige Arbeit von RAYMOND T. BIRGE (1929), welcher als erster die Zuverlässigkeit unserer Kenntnisse einer Prüfung unterzog. Der Artikel gibt zuerst eine Skizze des historischen Fortschrittes unserer Kenntnisse der Atomkonstanten mit kurzen Beschreibungen sowohl der früher verwendeten als auch der moderneren Methoden. Dann untersucht er die Zahlenwerte vom Stand 1955 und eine Kontrolle mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate hinsichtlich der besten Übereinstimmung und sinnvollsten Festlegung. So wird in einem sehr instruktiven perspektivischen Bild die Verträglichkeit der Messungen der Konstanten e , m und h illustriert und außerdem in Tabellen die Zahlenwerte, welche nach den verschiedenen experimentellen Methoden ermittelt wurden, gegenübergestellt. Die Ergebnisse aller dieser Betrachtungen werden am Schluß des Artikels übersichtlich zusammengestellt, wobei die erzielte Genauigkeit angegeben wird.

Der zweite Artikel des Bandes behandelt die Quantenmechanik der Ein- und Zweielektronensysteme und wurde von A. H. BETHE gemeinsam mit E. E. SALPETER verfaßt. Er stellt eine Erweiterung des berühmten Artikel gleichen Namens von H. A. BETHE allein dar, welcher im „blauen Handbuch“ veröffentlicht wurde. Die Abschnitte 7 bis 9 wurden neu hinzugefügt und behandeln die Methoden im Falle eines kontinuierlichen Spektrums für ein kugelsymmetrisches Potential, die Wellenfunktionen im Impulsraum im Falle eines diskreten und kontinuierlichen Spektrums. Im letzten Abschnitt wurden die heute sehr oft verwendete Methode von LIPPMANN und SCHWINGER skizziert und die ebenen Wellen als Lösungen mit ihren Zerlegungen nach positiven und negativen Frequenzanteilen komplex dargestellt. Darauf folgt dann die Behandlung der DIRACschen Theorie, welche den

heutigen Erfordernissen entsprechend sowohl in nichtkovarianter als auch in kovarianter Form Behandlung findet. Zur letzteren wäre zu erwähnen, daß sich die Verfasser der imaginären Metrik ($x_4 = ict$) bedienen, die im Gegensatz zu der von FEYNMAN verwendeten heute nicht mehr sehr üblich ist. Der Abschnitt 11 behandelt den Drehimpuls, der Abschnitt 12 die PAULISCHE Theorie. Letztere wurde ebenfalls etwas ausführlicher dargestellt. Bei der exakten Behandlung der DIRAC-Gleichung wurden die ebenen Wellenlösungen und die Streuamplituden im Hinblick auf die Elektronenstreuung vertieft und die heute anerkannte Formel von MCKINLEY-FESHBACH erörtert. Auch hier wurde wieder das Verhalten im Impulsraum ausführlicher behandelt und die Zerlegung nach kleinen und großen Komponenten sauber durchgeführt. Neu kommt auch hinzu die Behandlung der Strahlungskorrekturen sowie die S-Matrixtheorie. Die modernen Rechenmethoden der kovarianten Formulierung von FEYNMAN und die Verwendung der Graphen wurden verhältnismäßig kurz behandelt, wogegen auf die gebundenen Zustände etwas mehr Gewicht gelegt wurde. Es ist dem Referenten unmöglich, auf alles näher einzugehen, wegen der Fülle des Stoffes. Der Artikel schließt mit dem vielzitierten und fast schon historisch gewordenen Anhang über Kugelfunktionen, der noch aus der Zeit stammt, wo H. A. BETHE bei SOMMERFELD in München gearbeitet hat.

P. URBAN, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. FLÜGGE. Band XLVII: Geophysik I. Mit 289 Textabb., VIII, 659 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. Geb. DM 118.—, Subskr.-Preis DM 94.40.

Der eben erschienene erste Band „Geophysik“ entwirft in sechzehn Beiträgen für die bekannte und anerkannte Fachleute verantwortlich zeichnen, ein Bild vom derzeitigen Stand unseres Wissens und unserer Vorstellungen über die Physik der festen Erde. Erst die Lektüre dieser Aufsätze läßt die — wie auf anderen —, so auch auf allen Gebieten der Geophysik erzielten Fortschritte der letzten Jahrzehnte richtig zum Bewußtsein kommen und man erkennt damit auch, wie dringend nötig schon eine zusammenfassende Darstellung geworden ist. Denn obgleich über die eine oder andere Teilfrage Monographien erschienen sind, so fehlt diesen doch meist der Blick über die Grenze hinüber zu den Nachbargebieten, wodurch oft genug wichtige und bedeutsame Zusammenhänge verloren gehen oder zumindest nicht die rechte Würdigung erfahren. Man darf demgegenüber mit Befriedigung feststellen, daß das Bemühen um eine geschlossene Darstellung, die auch zu den Nachbardisziplinen die Verbindung immer wieder herstellt, in dem vorliegenden Band an vielen Einzelstellen, aber auch in der Gesamtanordnung deutlich sichtbar wird.

Allein schon was SIR HAROLD SPENCER-JONES in seinem Beitrag „The Rotation of the Earth“ Grundlegendes über die Zeiteinheit zu sagen weiß, betrifft nicht nur den Geophysiker, sondern es muß ebenso den Physiker aufrütteln, rührt diese Frage doch an einer Grundfeste des vierdimensionalen Raum-Zeit-Koordinatensystems ebenso wie am Centimeter-Gramm-Sekunden-Maßsystem. Beobachtungen einer beschleunigten Bewegung von Sonne und Mond und über unregelmäßige Schwankungen der Mondbewegung werden diskutiert, um schließlich die Gründe für unregelmäßige und jahreszeitlich bedingte regelmäßige Änderungen in der Erdrotation aufspüren zu können. Mit der Erkenntnis, daß sich die Erde infolge ihrer unregelmäßigen Rotation nicht für die Festlegung einer Maßeinheit — von der man ja billigerweise Konstanz voraussetzen muß — eignet, erhebt sich schließlich die Forderung nach einer wirklich konstanten Zeiteinheit, über deren Festlegung der letzte Abschnitt kurz berichtet.

JEAN COULOMB, Direktor des Institut de Physique du Globe in Paris ist mit zwei Beiträgen vertreten, seine „Séismométrie“ befaßt sich vor allem mit der

Theorie und mit dem praktischen Aufbau verschiedenartiger Seismographen, wobei auch die modernen, elektronischen Einrichtungen, wie sie vorwiegend für die Sprengseismik entwickelt worden sind, auf ihre Brauchbarkeit für die Erdbebenforschung untersucht werden. Seine Ergänzung findet dieser Abschnitt in dem folgenden Aufsatz „Seismic Wave Transmission“ von K. E. BULLEN, in dem man alles Wissenswerte über die Deformationstheorie, über die transversalen und longitudinalen Erdbebenwellen und ihre Laufzeiten erfährt. Selbstverständlich wird auch der Erforschung des Erdinnern mit Hilfe seismischer Beobachtungen ein Abschnitt gewidmet. In einem kurzen Beitrag „L'agitation microséismique“ mag man vielleicht einen Hinweis auf einige neuere deutsche Arbeiten vermissen, die eine gewisse Verbindung zu meteorologisch-ozeanographischen Fragen herzustellen gestatten. Die schwierigen Verhältnisse bei Oberflächen-Wellen und beigeführten Wellen werden von MAURICE EWING und FRANK PRESS an Hand ausgewählter Seismogramme ausführlich dargestellt, ein weiterer Beitrag „Seismic Prospecting“ der gleichen Verfasser leitet dann über zur Sprengseismik, wobei sowohl Apparate als auch Ergebnisse (und ihre Deutung) der Reflexions- und der Refraktions-Schießtechnik erläutert werden. Mit der Messung elastischer Eigenschaften von Gesteinen setzen sich HEINRICH BAULE und ERICH MÜLLER ausführlich auseinander, wobei vor allem die in letzter Zeit erzielten Fortschritte auf dem Gebiete des Ultraschalls und verschiedener elektronischer Verfahren zur Erzeugung und Messung kurzzeitiger Impulse gebührende Erwähnung finden.

G. D. GARLAND berichtet in seinem Beitrag „Gravity and Isostasy“ über die absolute und relative Messung der Schwerkraft, sowie über die Bedeutung und mathematische Interpretation der Schwerkraft-Anomalien, ADRIAN EUGEN SCHEIDEGGER befaßt sich mit den Kräften in der Erdkruste. Ein sehr großer Raum ist dem ganz ausgezeichneten Beitrag von J. T. WILSON, R. D. RUSSELL und R. MACCUNN FARQUHAR, betitelt „Radioactivity and Age of Minerals“ vorbehalten. Der kurze historische Rückblick auf die Versuche, eine Antwort zu geben auf die die Menschheit allzeit bewegende Frage nach dem Alter der Erde und des Alls, zeigt einmal mehr die in den letzten Jahrzehnten erzielten enormen Fortschritte auf diesem Teilgebiet auf, beweist darüber hinaus aber auch die Wichtigkeit einer Zusammenarbeit mit den Nachbardisziplinen Astronomie und Geologie. Die physikalischen Grundlagen des radioaktiven Zerfalls — einst Domäne der Luftelektriker — und die Ergebnisse der Isotopenforschung werden ausführlich behandelt und erst nach dieser Vorarbeit wird auf die Meßmethoden zur Bestimmung der Gesteins-Radioaktivität und auf die vorliegenden Meßergebnisse eingegangen. Die verschiedenen Methoden der Altersbestimmung — zurückgeführt einerseits auf den Zerfall von Uran und Thorium, andererseits auf den von Kalium und Rubidium (u. a.) — werden nicht nur erläutert, sondern auch durch zahlreiche Zahlenangaben in ihrer Brauchbarkeit bestätigt. Ein Kapitel über Fragen, die vor allem den Geologen interessieren, beschließt diesen wertvollen Beitrag.

Mit dem Erdinnern beschäftigt sich des weiteren JOHN ARTHUR JACOBS, wobei mit den theoretischen Untersuchungen über die Temperaturverhältnisse im Erdinnern unter Einwirkung des radioaktiven Zerfalls der Anschluß an den vorherigen Beitrag gefunden wird, während sich weitere Abschnitte mit dem Erdmagnetismus im Zusammenhang mit dem Erdinnern beschäftigen und so bereits überleiten zu Beiträgen von LOUIS CAGNIARD (Electricité tellurique) und S. K. RUNCORN (Magnetization of Rocks). Von letzterem Verfasser stammt auch ein weiterer Beitrag „The Magnetism of the Earth's Body“, in dem Instrumente und Methoden zur Messung des magnetischen Erdfeldes und seiner Variationen beschrieben werden, während Diagramme und Weltkarten zahlreiche neuere Ergebnisse darstellen. Ein Schlußkapitel beleuchtet schließlich kritisch die Theorien,

die zur Erklärung des Erdmagnetfeldes, seiner Westwärtsdrift und seiner säkularen Variation erdacht worden sind.

Der letzte Beitrag des Bandes, „Figur der Erde“, ist vor allem den Geodäten gewidmet. KARL JUNG erörtert hierin zunächst die Grundbegriffe und entwickelt dann an Hand zahlreicher Formeln die schwierige Theorie der Geoidbestimmung. Der Bewegung der Erdoberfläche sowie neuzeitlichen Problemen und Entwicklungen ist je ein weiteres Kapitel gewidmet, während ein umfangreicher Anhang Zahlenwerte, Formeln und auch Tabellen der Kugelfunktionen erster Art aufgenommen hat.

Der Band wird abgeschlossen mit je einem zweisprachigen (deutsch-englisch, englisch-deutsch) Sachverzeichnis für die in deutscher und englischer Sprache abgefaßten Beiträge, sowie mit einem französischen Inhaltsverzeichnis für die in letzterer Sprache geschriebenen, wodurch das Nachschlagen bestimmter Stichworte erleichtert wird.

Der Verlag hat das Buch in gewohnter Weise mit einem ausgezeichneten Druck auf reinweißem, dünnem Papier und mit einer sorgfältigen Wiedergabe der zahlreichen Formeln und Abbildungen ausgestattet.

O. BURKARD, Graz

Elasticity, Fracture and Flow with Engineering and Geological Applications. Von J. C. JAEGER. Mit 54 Textabb., VIII, 152 S. London: Methuen & Co. Ltd. — New York: J. Wiley & Sons, Inc. 1956. 10 s. 6 d.

Der Inhalt gliedert sich in drei gleich große Kapitel und behandelt die Theorien der Elastizität und Viskosität in strenger mathematischer Formulierung.

Das erste Kapitel ist dem Druck und der Spannung gewidmet, wobei die Formeln für ein-, zwei- oder dreidimensionale Größen abgeleitet werden, die Spannung kann dabei endlich oder infinitesimal sein. Sehr viel Raum nehmen das reziproke Spannungsellipsoid und die MOHRsche Darstellung von Druck und Spannung in Anspruch.

Das zweite Kapitel behandelt das Verhalten der einzelnen Stoffe und geht damit auf die Bedürfnisse der Praxis näher ein. Es beginnt mit den verschiedenen Druck-Spannungs-Diagrammen, wobei neben den bekannten Deformationen auch jene durch plötzliche und ruckartige Belastung Erwähnung finden. Hierauf werden die verschiedenen Moduln und die POISSONSche Zahl abgeleitet und deren Werte für einige Stoffe angegeben. Der Rest des Kapitels behandelt einige spezielle Anwendungen, wie anisotrope Körper, hohen Druck etc., um nur einige Beispiele zu nennen, ferner die Brücke und den Beginn einer plastischen Deformation. Sehr schön ist auch die Rolle der Geschwindigkeit bei den Flüssigkeiten und die Beziehungen zwischen Viskosität und Elastizität erklärt. Zum Abschluß finden wir die verschiedenen Substanzen, wie HOOKESche, NEWTONSche, ST. VENANTSche, KELVINSche, VOIGTSche, MAXWELLSche und BINGHAMsche Stoffe erklärt und einander gegenübergestellt.

Das letzte Kapitel behandelt die Bewegungsgleichungen und den Gleichgewichtszustand bei den verschiedenen Stoffen und unter verschiedenen Voraussetzungen.

Das Buch ist sehr übersichtlich, sowohl hinsichtlich des Inhaltes als auch der Ausstattung. Es ist als Hilfsmittel beim Studium wie in der Praxis vortrefflich geeignet.

H. ZINGL, Graz

Metallkunde für den Konstrukteur. Von E. M. H. LIPS. Mit einem Geleitwort von A. MATTING. Übersetzt aus dem Englischen von R. SCHOLZ. (Philips' Technische Bibliothek.) Mit 173 Textabb., XIV, 261 S. Eindhoven: N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken. 1956.

Um den Charakter des Buches vorwegzunehmen: Dieses Werk will mehr sein als eine vorwiegend theoretische Abhandlung über Metalle im üblichen Stil. Neben

einer gedrängten Zusammenfassung der wichtigsten theoretischen Elemente des metallischen Zustandes wendet sich der Autor vor allem an den Praktiker und bringt die Metallkunde in eine unmittelbare Beziehung zur modernen Konstruktionslehre. Der heutige Konstrukteur muß das Verhalten der verschiedenen Metalle von Grund auf verstehen, um sie möglichst wirtschaftlich anzuwenden und alle Möglichkeiten, die sich ihm durch die Kenntnis ihrer besonderen Eigenschaften bieten, ausnützen zu können.

Nun kurz zum Inhalt: Im Abschnitt über die mechanischen Eigenschaften der Metalle und Legierungen werden die verschiedenen Prüfverfahren der Härtebestimmung, des Zugversuches, des Kerb- und Torsionsschlagversuches beschrieben und die damit verbundenen Begriffe wie Härte, Elastizitätsgrenze, Streckgrenze, Dehnung usw. erläutert. Tabellen und Schemata ergänzen die klaren und prägnanten Ausführungen. Den Übergang zum metallurgischen Teil des Buches bildet ein Absatz über Korrosion. Als ausführlich beschriebene Beispiele von Zustandsdiagrammen findet man das „klassische“ Eisen-Zementitsystem und das Eisen-Graphitsystem vor. Viele gute Mikroaufnahmen vervollständigen den Abschnitt. Den Hauptinhalt des Buches bildet aber die eingehende Behandlung zunächst der Eisen-Kohlenstofflegierungen und dann der Nichteisenmetalle und -legierungen. Zahlreiche Tabellen, Nomogramme und Schaubilder veranlassen auch hier den Benutzer das Buch oft und gerne zur Hand zu nehmen. Sowohl dieser wie die beiden letzten Abschnitte (Wärmebehandlung von Metallen, Verformung und Verbindung von Metallen) zeichnen sich durch die übersichtliche Anordnung des Stoffes und vor allem durch die Fülle des Informationsmaterials aus, das in Form unzähliger exakter Tabellenwerte unmittelbar als Konstruktionsgrundlage verwendbar ist.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß dieses Buch zweifellos in einem weiten Leserkreis Interesse und Anklang finden wird: Konstrukteuren, Ingenieuren und Studenten wird hier die Gelegenheit zu einer äußerst nützlichen Abrundung des technischen Grundwissens geboten.

K. OROSZY, Graz

Geometrical Optics. Von L. C. MARTIN. Mit 130 Textabb., VII, 215 S. London: Sir I. Pitman & Sons, Ltd. 1955. 22 s. 6 d.

Die geometrische Optik, heute in den Vorlesungen oft als Stiefkind behandelt, wird in dem Buch für Anfänger mit gewissen Vorkenntnissen geeignet dargestellt. Um es mit Gewinn vollständig studieren zu können, wird man im allgemeinen wohl schon einige Semester Physik und Mathematik gehört haben müssen.

Das vorliegende Buch kann und will keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben, auch wird die mathematische Behandlung nicht auf zu hohem Niveau durchgeführt, es ist der Gegenstand aber ausführlicher behandelt als in den allgemeinen Physiklehrbüchern. Der Verfasser bemüht sich, nicht nur die Grundgesetze der Optik darzustellen, sondern auch ihren Gültigkeitsbereich anzugeben und ihre Anwendbarkeit zu diskutieren. Das Buch ist in sieben Kapitel straff gegliedert, die jedes für sich weitgehend abgeschlossen ein Teilgebiet behandeln. Nach jedem Kapitel sind eine Anzahl von Übungsbeispielen (insgesamt 84), sehr unterschiedlicher Schwierigkeit angegeben, die Lösungen sind am Ende des Buches kurz notiert.

Im Einführungskapitel, dem umfangreichsten und besten des Buches, werden die Grundgesetze der geometrischen Optik behandelt. Um Raum zu sparen, ist die Reflexion als Spezialfall der Brechung dargestellt. Die Entwicklung verschiedener Größen nach Potenzreihen der Koordinaten bildet eine Vorstufe für spätere Rechnungen, insbesondere für das die Abbildungsfehler behandelnde Kapitel.

Dann werden die allerwichtigsten Grundlagen der Theorie der kollinearen Beziehungen in analytischer Darstellung behandelt, wobei die Terminologie entwickelt wird. Die dicken Linsen und Systeme von dünnen Linsen werden etwas ausführlicher besprochen, kurz auch ein katadioptrisches System erwähnt.

Nun wird einiges über die Dispersion gesagt und danach die Grundlagen der chromatischen Korrekturen besprochen. Mikroskop, Fernrohr und Spektroskop werden im üblichen Lehrbuchsumfang dargestellt. Nach, wegen Platzmangels nur oberflächlichem Eingehen auf die Beugungserscheinungen, wird das Auflösungsvermögen optischer Instrumente wieder etwas genauer diskutiert. Das Kapitel über die Beobachtung und Aufzeichnung von Bildern hält sich durchaus im Rahmen üblicher Darstellungen, auch von der Photometrie ist nichts besonderes zu berichten.

Dagegen verdient das letzte Kapitel über Abbildungsfehler wieder ein gewisses Augenmerk. Es werden die Grundlagen der algebraischen Theorie der Abbildungsfehler, wie sie auf SEIDEL zurückgeht, dargestellt und die primären Bildfehler in leicht verständlicher Weise besprochen.

Im großen und ganzen muß man das Erscheinen des Buches begrüßen, obgleich es in seinem Aufbau etwas heterogen ist. Es füllt eine Lücke auf dem Lehrbuchsektor durch seine Stellung zwischen den allgemeinen Physiklehrbüchern und ausführlicheren optischen Werken. Einige historische Hinweise und die gelegentlich von der üblichen abweichenden Darstellungsweise, bei der man immer wieder einen Autor von großer Erfahrung auf dem Gebiet der technischen Optik spürt, machen das Buch sicher auch für fortgeschrittene Studierende zu einer interessanten Lektüre.

O. PREINING, Wien

Der Kathodenverstärker in der elektronischen Meßtechnik. Von K. MÜLLER-LÜBECK. Mit 129 Textabb., XI, 155 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1956. Geb. DM 24.—.

Der Verfasser will mit der Herausgabe dieses Buches dem großen Mangel an zusammenfassender und systematisch gegliederter Literatur auf dem Gebiete der Verstärkertechnik abhelfen. Als gewiegener Praktiker — blickt er doch auf langjährige erfolgreiche Tätigkeit in großen deutschen Industrie-Entwicklungslaboratorien zurück — stellt er seine große Erfahrung in den Dienst seiner gestellten Aufgabe und versteht es, zahlreiche verstreut vorliegende Unterlagen geschickt zu sammeln und mit seinen eigenen Beiträgen zu verschmelzen.

Besonders hervorheben möchte der Rezensent die theoretischen Kapitel über Kathodenverstärker und Gleichrichter, in denen die Theorien der verschiedenartigsten gebräuchlichen Schaltungen besprochen und gegenübergestellt werden. Den Hauptinhalt des Buches bildet aber der praktische Teil, in welchem auf die Benützung von Kathodenverstärkern in der modernen Gleich- und Wechselspannungsmeßtechnik ausführlich eingegangen wird. Viele Anwendungsbeispiele aus Elektro- und Fernsehtechnik ergänzen den Inhalt in zweckmäßiger Weise. Außerdem wird eine Anzahl von industriell hergestellten Meßgeräten mit vielen Schaltskizzen und Abbildungen eingehend beschrieben. Sehr aufschlußreich ist das abschließende Kapitel über Stromrichtermeßtechnik, ein Gebiet über das leider nur wenig Literatur existiert.

Die sehr ausführliche und auf die praktischen Bedürfnisse zugeschnittene Darstellung ist für denjenigen, der mit Verstärkern, speziell meßtechnisch, zu tun hat, zweifellos eine große Hilfe.

K. OROSZY, Graz

Atomkraft. Der Bau von Atomkraftwerken und seine Probleme. Eine Einführung für Ingenieure, Energiewirtschaftler und Volkswirte. Von F. MÜNZINGER.

Zweite, völlig neu bearbeitete stark erweiterte Auflage. Mit 171 Textabb. und 51 Tab., XII, 224 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1957. Geb. DM 29.40.

Wie notwendig eine Einführung in die Probleme der Atomkraftwerke für Ingenieure ist, zeigt allein schon die Tatsache, daß die erste Auflage dieses Werkes so schnell vergriffen war. Die nun vorliegende zweite Auflage wurde gänzlich umgearbeitet. So ist der Reaktorphysik ein wesentlich breiterer Raum gewidmet. Dabei hat sich der Verfasser auf das zum Verständnis Wesentliche beschränkt, so daß sich jetzt jeder an Hand dieses Werkes einen guten Überblick aneignen kann. Daneben wurden die von mir an der ersten Auflage kritisierten — physikalisch nicht einwandfreien — Fachausdrücke berichtigt, die einzelnen Vorgänge klar und übersichtlich erklärt und dargestellt, so daß das Studium dieser Auflage auch für den nicht kernphysikalisch Vorgebildeten sehr erleichtert wurde.

Der technische Teil wurde durch die auf der Genfer Konferenz bekanntgegebenen Details bereichert und ist nun gegenüber der ersten Auflage abgeschlossener und vollständiger. Die Einteilung der Reaktoren ist nun übersichtlicher, die vom Autor vorgeschlagene Kurzbezeichnung der einzelnen Typen tritt nunmehr gegenüber der üblichen Bezeichnung zurück, so daß sich auch derjenige sofort zurechtfindet, der sich bereits etwas in die Materie eingearbeitet hat.

Der wirtschaftliche Teil verwendet mit seltener Gründlichkeit die neuesten Preise. Damit werden die vom Autor durchgeführten Kalkulationen und der Vergleich der Situation in den wichtigsten Ländern sehr aktuell.

Abschließend ist zu sagen, daß diese Auflage das bisher einzige Werk in deutscher Sprache ist, das den Technikern, ja selbst den Physikern und Chemikern eine Einführung in die Probleme der Atomkraftwerke ermöglicht und hierbei jenes Wissen vermittelt wird, das die Techniker heute dringend benötigen.

Eine große Anzahl von Tabellen und Skizzen machen das Buch zum Nachschlagewerk, dies gilt vor allem für alle jene Dinge, die vorwiegend den Techniker interessieren.

H. ZINGL, Graz

Die Physik der Hochpolymeren. Herausgegeben von H. A. STUART. Dritter Band: Ordnungszustände und Umwandlungserscheinungen in festen hochpolymeren Stoffen. Mit 370 Textabb., XVI, 693 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. Geb. DM 89.—.

Nachdem die ersten zwei Bände der Reihe „Die Physik der Hochpolymeren“ das freie Molekül und das Molekül in Lösung behandelten, ist der vorliegende dritte Band den festen Hochpolymeren gewidmet. Entsprechend der Bedeutung dieser Stoffklasse beschränkt sich der vorliegende Band nur auf die Grundlagen, technologische Aspekte bleiben einem weiteren vierten Band vorbehalten. Wiederum sind die einzelnen Kapitel von bekannten Fachleuten geschrieben. Daß dennoch und trotz der überdies keineswegs homogenen Materie das Buch ein geschlossenes Ganzes wurde, ist eine beachtliche Leistung des Herausgebers.

Im ersten Teil werden die Ordnungszustände (Phasen) zunächst in Niedermolekularen und dann ausführlich in Hochpolymeren diskutiert und die Methoden zu ihrer Erforschung dargelegt, wobei das Schwergewicht auf der Röntgenstrukturanalyse liegt. Zwar ist bekanntlich der Phasenbegriff bei Hochpolymeren wesentlich weniger scharf zu fassen als bei den niedermolekularen Stoffen und noch Gegenstand lebhafter Diskussion (z. B. amorph-kristallin), doch zeigen gerade die Ausführungen dieses Bandes, daß seine entsprechend vorsichtige Anwendung durchaus sinnvoll und berechtigt ist. In sehr vollständiger Weise werden abschließend Strukturprobleme behandelt und zwar an Naturfasern (denen ein eigenes Kapitel gewidmet ist), Kunstfasern, den Proteinen und schließlich auch,

weniger konzentriert, an Kunststoffen allgemein. Naturgemäß kommen dabei auch Dinge zur Sprache, die durchaus im Fluß sind, wie z. B. die Sphärolithbildung beim Erstarren Hochpolymerer oder die langen Perioden bei bestimmten Kunstfasern, welche überdies neuerdings auch bei Cellulosefasern entdeckt wurden, wodurch die Ausführungen auf S. 220 oben schön bestätigt werden.

Im zweiten Teil werden Umwandlungserscheinungen (im wesentlichen Kristallisation und glasiges Erstarren) behandelt, wobei die Darbietungsweise verschieden ist (thermodynamisch, statistisch, modellmäßig und phänomenologisch). Dadurch werden manchmal Probleme von verschiedenem Gesichtswinkel aus behandelt, was z. B. besonders reizvoll bei der Betrachtung des Schmelzens der Fall ist (S. 557). Auch die Sphärolithbildung und die Ideen der Helix-Textur kommen ausführlich zur Sprache. Zuletzt wird noch versucht, Zusammenhänge zwischen den Umwandlungserscheinungen Kristallisation und Einfrieren und der chemischen Konstitution aufzuzeigen.

Im allgemeinen muß man sagen, daß der Band gleichermaßen als Nachschlagewerk und zum gründlichen Studium verwendet werden kann; da er sowohl die maßgeblichen Theorien genügend ausführlich bringt, so daß man meist auf das Aufsuchen der (übrigens gut und reichlich zitierten) Originalliteratur verzichten kann, als auch eine Fülle von Daten und Ergebnissen in Tabellen und fast durchwegs sehr guten Illustrationen. Auch die äußere Ausstattung ist von der gewohnten Qualität, so daß das Werk jedem Fachmann (Physiker wie Physikochemiker) uneingeschränkt empfohlen werden kann.

J. SCHURZ, Graz

Vorlesungen über Atomphysik. Band I. Von J. PICT. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1956.

Das Buch befaßt sich mit der Physik der Atomhülle in phänomenologischer Darstellung, während die Kernphysik und die Quantentheorie einem zweiten Band vorbehalten bleiben. An speziellen Kenntnissen setzt der Verfasser wenig voraus, da er die Grundlagen der statistischen Mechanik, der Strahlungstheorie und des Atombaus ausführlich behandelt, doch ist immerhin ein gewisses Maß an physikalischem Denkvermögen und mathematischem Rüstzeug erforderlich, da die Fülle des gebotenen Stoffes auf relativ kleinem Raum eine beträchtliche Konzentration verlangt. Das soll niemanden vom Studium dieses Buches abschrecken, sondern im Gegenteil andeuten, daß es mehr bietet, als es auf den ersten Blick verspricht. Für Anfänger weniger geeignet, kann es jedem fortgeschrittenen Studierenden bestens empfohlen werden. Insbesondere liefert es eine solide Grundlage für die spätere Beschäftigung mit der modernen „nicht-klassischen“ Physik.

L. HANKE, Graz

Wahrscheinlichkeitstheorie. Von H. RICHTER. (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften: Band 86.) Mit 14 Textabb., XII, 435 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1956. DM 66.—, geb. DM 69.60.

Aus der Feder des bekannten Statistikers Prof. Dr. HANS RICHTER, München, stammt das vorliegende Werk, welches als das erste deutsche Lehrbuch über moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung anzusehen ist. Die älteren (deutschsprachigen) Bücher größeren Umfanges sind alle vor der grundlegenden Abhandlung A. KOLMOGOROFF (1933 in der Reihe: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete) verfaßt und operieren mit uneinheitlichen, zum Teil auch unbefriedigenden Begriffssystemen, welche eigentlich nur im Falle der LAPLACE-Experimente eine strenge Formulierung gefunden haben. Erst durch die maßtheoretische Charakterisierung der Wahrscheinlichkeit, die als normiertes Maß der Ergebnismenge definiert wird, war es möglich, die heterogenen Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung logisch in ein in sich konsistentes System zusammenzufassen. Besonders

wertvoll hat sich der moderne Wahrscheinlichkeitsbegriff bei der Behandlung stochastischer Prozesse und statistischer Entscheidungsverfahren erwiesen.

Der Verfasser setzte sich zum Ziele, in einem einzelnen für sich verständlichen Bande, die allgemeine Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung systematisch vom maßtheoretischen Standpunkte aufzubauen. Es sei gleich vorweggenommen, daß dieses Programm vom Verfasser in eindrucksvoller Weise durchgeführt wurde.

Der überaus klare Aufbau der maßtheoretischen Grundlagen im ersten und vierten Kapitel ermöglichen es auch dem nicht mengenalgebraisch eingestellten Leser den Intentionen des Verfassers zu folgen und die an sich schwierigeren Kapitel 5 und 7 mit Verständnis zu studieren. Viele Ergebnisse der älteren Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche im Kapitel 3 behandelt werden, wie z. B. die Theorie der Glücksspiele u.a.m., erhalten im Lichte der modernen Betrachtungsweise ihre tiefere Bedeutung. Das fünfte Kapitel (zufällige Größen auf allgemeinen Wahrscheinlichkeitsfeldern) geht dann auf die zentralen Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein. Die allgemeine Theorie der Verteilungsfunktionen, der erzeugenden Funktion und ihrer Verallgemeinerung, der charakteristischen Funktionen wird eingehend behandelt. Dieser wichtigste und umfassendste Abschnitt des Buches stellt an den Leser besondere Anforderungen, der aber auch andererseits durch eine Fülle interessanter Sätze und Theoreme und nicht zuletzt durch die prägnante Gestaltung der Beweisführungen reichlich entschädigt wird. Das folgende Kapitel ist den elementaren Verteilungen gewidmet, welche organisch an die allgemeine Theorie des fünften Kapitels angeschlossen sind. Das Werk schließt mit der Untersuchung der Konvergenz zufälliger Größen (Kapitel 7). Nach der strengen Formulierung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Konvergenzbegriffe werden deren allgemeine Eigenschaften und die Konvergenzkriterien ausführlich abgeleitet. Die Grenzwertsätze für BERNOULLI-Experimente, bekannt als „Gesetz der großen Zahlen“ finden hier als Spezialfall den gebührenden Raum.

Es ist zu hoffen, daß das vorliegende Buch als Standardwerk der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung die entsprechende Würdigung im deutschen Leserkreis findet. Allerdings will der Inhalt des Buches gewissenhaft erarbeitet sein.

E. LEDINEGG, Graz

Struktur und Eigenschaften der Kristalle. Eine Einführung in die geometrische, chemische und physikalische Kristallkunde. Von H. G. F. WINKLER. Zweite, erweiterte und umgearbeitete Auflage. Mit 111 Abb., 2 Tafeln und 82 Tab., VIII, 314 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1955. DM 25.80, geb. DM 29.60.

Die Kristallkunde berührt Probleme der Mineralogie, Chemie, Physik sowie auch der Technik und nimmt dadurch eine Schlüsselstellung innerhalb der exakten Naturwissenschaften ein. Ein Bedürfnis nach einer leicht verständlichen und dabei doch in die Tiefe gehenden Einführung für Studierende ist unzweifelhaft vorhanden. Das vorliegende Buch unternimmt es, wie dem Referenten scheint, in sehr glücklicher Weise, diese Lücke zu füllen. Die zentrale Stellung nimmt darin der Zusammenhang zwischen Struktur und Eigenschaften ein, der einmal von Seite der Struktur und zum andern Mal von Seite der Eigenschaften beleuchtet wird. Durch Verzicht auf eine systematische Vollständigkeit der Kristallstrukturen einerseits und auf die Behandlung noch nicht genügend geklärter Eigenschaften andererseits war es möglich, bei verhältnismäßig geringem Umfang des Buches doch die aufgeworfenen Probleme sehr eingehend zu besprechen, wobei die Klarheit der Darstellung angenehm auffällt.

Es handelt sich somit um eine Einführung im besten Sinn des Wortes, der man nur die gebührende Anerkennung und Verbreitung wünschen kann.

G. POROD, Graz

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzu-

wenden, also $(a + b)/c$ statt $\frac{a + b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatumster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPSTER, Nature 136, 180 (1935).

Autorenkorrekturen, das heißt nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satz-kosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Mikrochimica Acta

Schriftleitung

M. K. Zacherl

Wien

Die Zeitschrift erscheint ab 1957 zu einem festen Jahresbezugspreis. Im Jahre 1958 wird ein Band von etwa 800 Seiten Umfang zum Jahresbezugspreis von S 660.—, DM 110.—, sfr. 113.—, \$ 26.— erscheinen. Der Band setzt sich aus 6 Heften zusammen, die in Abständen von etwa zwei Monaten herausgegeben werden.

Soeben erschienen:

1957/Sechstes Heft. (Abgeschlossen im Oktober 1957.) Mit 22 Textabbildungen. 102 Seiten. 1957.

Inhaltsverzeichnis: Cheronis, N. D., and M. C. Zymaris. The Microdetermination of Reducing Sugars in Blood by Means of *p*-Anisyl Tetrazolium Blue. — Gagliardi, E., und H. Reimers. Untersuchungen und analytische Verwertung von Tripelsalzen vom Typus NaMe(II) (UO₂)₃ (CH₃COO)₉. \times H₂O. — Musil, A., und R. Pietsch. Metallfällungen mit Methylphenylarsinsäuren. — Musil, A., und W. Haas. Bestimmung von Vanadium mit β -Benzoylphenylhydrazin. — Ballezo, H., G. Doppler und A. Lanik. Eine rasche Fluor-Mikrobestimmung durch Destillation und Absorption. — Derkosh, J., und H. Neuninger. Das spektroskopische Verhalten von Kupferlegierungen im fremdgezündeten Abreißbogen. — Roth, H., und Ph. Schuster. Bestimmung von Säureamiden. — Roth, H., und Ph. Schuster. Bestimmung der Peroxydgruppe (aktiver Sauerstoff). — Roth, H., und W. Beck. Bestimmung der Dithiocarbaminat- und Thiuramidisulfidgruppe. — Conway, H. S. Remark upon the Article by K. Bürger, „Beitrag zur direkten mikroanalytischen Bestimmung des Sauerstoffes in organischen Verbindungen“. — Mitteilungen aus chemischen Gesellschaften. — Buchbesprechungen. — Sachregister.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

Soeben erschien
das erste Lehr- und Nachschlagewerk über Atomreaktoren
in deutscher Sprache

Physik und Technik der Atomreaktoren

Von

Ferdinand Cap

Tit. ao. Professor an der Universität Innsbruck

Mit 100 Textabbildungen. XXIX, 487 Seiten. Gr.-8^o. 1957

Ganzleinen S 384.—, DM 64.—, sfr. 65.50, \$ 15.25

Seit der Genfer Atomkonferenz ist das Interesse für Atomreaktoren in Kreisen der Wissenschaft und Industrie sehr stark angewachsen. Gleichzeitig wird es immer schwieriger, aus der Flut von Einzelarbeiten und aus den spärlichen Buchveröffentlichungen, die bisher in Amerika erschienen sind, ein abgerundetes Bild über Theorie, Physik und Technik der Atomreaktoren zu bekommen. Professor CAP, der wohl als einer der ersten in Europa schon im Studienjahr 1950/51 an der Universität Innsbruck Vorlesungen über Reaktorphysik gehalten hat und der in verschiedenen Reaktorzentren Europas Erfahrungen sammeln konnte, gibt mit diesem Lehrbuch, dem ersten seiner Art in deutscher Sprache, einen Überblick über den derzeitigen Stand des theoretischen, experimentellen und technischen Wissens über Atomreaktoren. Ausgehend von den kernphysikalischen Grundlagen, behandelt der Verfasser Theorie, Bau, Betrieb und Sicherheit solcher Anlagen. Ein besonderer Abschnitt bringt in übersichtlicher Darstellung eine eingehende Beschreibung der bisher entwickelten Reaktortypen. Daran schließen sich Kapitel über die Anwendung der Reaktoren, über Strahlungsschutzrecht, Organisationsfragen und Atom-Völkerrecht. Die wissenschaftliche Literatur konnte bis zum Ende des Jahres 1956 berücksichtigt werden.

Das Werk wendet sich an Studierende höherer Semester der verschiedenen Fachrichtungen, wie Physik, Chemie, angewandte Mathematik und sämtlicher technischen Fächer, doch wird auch der Fachwissenschaftler und der für Atomfragen interessierte Industrielle größten Nutzen aus dem Werk ziehen können, da es einerseits die modernsten Probleme der Reaktortheorie, wie die Störungstheorie oder die Transporttheorie schneller Reaktoren, berücksichtigt, und andererseits auch schwierigere mathematische Probleme in einer auch für den Nicht-theoretiker verständlichen Weise behandelt. Die einzelnen Paragraphen sind durch Übungsbeispiele ergänzt. Das Buch, das nicht nur als Lehrbuch, sondern auch als Handbuch und Nachschlagewerk gedacht ist, verfügt über ein sehr ausführliches Literatur- und Sachwortverzeichnis (deutsch-englisch) und gibt über alle wichtigen, bisher bekannten kernphysikalischen Daten Auskunft.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung